Algèbre linéaire - Examen du 16 mai 2023 - Corrigé

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha), \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + y + z = 0, 3y + 2z = 0\}$$

1. **[/1.5 pt]** Déterminer une base et la dimension de H.

ce n'est pas « 0, 3y », ce sont 2 équations ≠, mais je ne vais pas pénaliser pour ça évidemment

1) $H = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} -x+y+z=0, \\ 3y+2z=0 \end{array} \right\}$

Donc

$u = (x,y,z) \in H \Longleftrightarrow_{(*)} \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \underbrace{y}_{=-\frac{2}{3}z}+z = \frac{1}{3}z \\ y = -\frac{2}{3}z, \; z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow u = \left(\frac{1}{3}z, -\frac{2}{3}z, z\right) = z\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right), z \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow u \in \text{Vect}\Big(\underbrace{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)}_{u_3}\Big)$

Donc $H = \text{Vect}\left(\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)\right) = \text{Vect}(u_3)$

$\Longrightarrow \{u_3\}$ est une famille génératrice de H, libre car $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

donc $\{u_3\}$ est une base de H et $\dim H = \text{Card}(\{u_3\}) = 1$

Rq On peut aussi exprimer x et z en fonction de y :

$z = -\frac{3}{2}y, \quad x = -\frac{1}{2}y \quad \Rightarrow H = \text{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)\right)$

ou alors y et z en fonction de x :

$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x-y = 3x \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow H = \text{Vect}(1,-2,3)$

$\longrightarrow$ C'est juste aussi ! Par contre, il faut utiliser les 2 équations

Par exemple : $u \in H \cancel{\Longleftrightarrow} x = y+z$ et donc $H = \cancel{\text{Vect}}((-1,1,0),(-1,0,1))$ Faux Faux

mais $u \in H \Longrightarrow x = y+z$ donc $H \subset \text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$

et ce n'est pas ce qu'on veut.

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. [/**1.5 pt**] Montrer que $\mathscr{F}_\alpha = \{u_1, u_2, v_\alpha\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $\alpha \neq 1$.

On commence par se demander à quelle condition $\mathcal{F}_\alpha$ est <u>libre</u> :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_\alpha = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\mathcal{F}_\alpha$ est libre ssi l'ensemble des solutions de (S_α) est $\{(0,0,0)\}$

$$\Longleftrightarrow (S_\alpha) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\alpha\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\alpha\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\alpha\lambda_3 = 0 \\ 3(\alpha - 1)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Deux cas se présentent

- Si $\alpha = 1$, alors $(S_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

  → Il y a une infinité de solutions, donc il y a des solutions non nulles

  Par ex pour $\lambda_3 = 1$, on trouve $\boxed{5u_1 - 3u_2 + v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}}$ (On vérifie : $5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓)

  → Si $\alpha = 1$ alors $\mathcal{F}_\alpha$ est liée, donc pas une base, donc, par contraposée, si $\mathcal{F}_\alpha$ est une base alors $\alpha \neq 1$

- Si $\alpha \neq 1$, $(S_\alpha) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3(\alpha-1)} L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -3\alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est la seule solution

Donc

Si $\alpha \neq 1$ alors $\mathcal{F}_\alpha$ est libre

Or $\operatorname{Card} \mathcal{F}_\alpha = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{F}_\alpha$ libre ssi c'est une base

et donc si $\alpha \neq 1$, $\mathcal{F}_\alpha$ est une base

Si on a oublié cette histoire de Cardinal et de dimension, il nous reste à montrer que si $\alpha \neq 1$, $\mathcal{F}_\alpha$ est génératrice

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, montrons que $u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_\alpha)$. On veut donc montrer qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_\alpha$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 - 3\alpha\lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = z \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 - 3\alpha\lambda_3 = y \\ -\lambda_2 - 3\lambda_3 = x + z \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ \lambda_2 - 3\alpha\lambda_3 = y \\ 3(\alpha - 1)\lambda_3 = z + x + y \end{cases}$$

$$\underset{\text{OK car } \alpha \neq 1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 - \lambda_2 = \frac{2}{3(\alpha-1)}(x+y+z) - y - \frac{\alpha}{3(\alpha-1)}(x+y+z) \\ \lambda_2 = y + 3\alpha\lambda_3 = y + \frac{\alpha}{\alpha-1}(x+y+z) \\ \lambda_3 = \frac{1}{3(\alpha-1)}(x+y+z) \end{cases}$$

→ Le système a des solutions, donc $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_\alpha)$

Donc si $\alpha \neq 1$ alors $\mathcal{F}_\alpha$ est génératrice

→ Par double implication, on a montré que $\mathcal{F}_\alpha$ est libre ssi $\alpha \neq 1$

Donc (comme on a dit) $\mathcal{F}_\alpha$ est une base ssi $\alpha \neq 1$

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha) = \text{Vect}(\mathcal{F}_\alpha)$$

3. [/1.5 pt] $\boxed{\text{Pour } \alpha \neq 1}$, donner une base et la dimension de G_α.

- Par définition du sous espace vectoriel engendré (Vect), $\mathcal{F}_\alpha$ est une famille génératrice de G_α

(⚠ On a montré en 2. que pour $\alpha \neq 1$ $\mathcal{F}_\alpha$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, mais ça ne dit pas que $\mathcal{F}_\alpha$ est une famille génératrice de G_α)

là par contre on peut utiliser (2) : $\mathcal{F}_\alpha$ est libre en général, indépendamment de $\mathbb{R}^3$ vs G_α

- De plus, on a vu en (2) que $\mathcal{F}_\alpha$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{F}_\alpha$ est libre (pour $\alpha \neq 1$, ce qu'on suppose ici)

→ $\mathcal{F}_\alpha$ est donc une base de G_α et donc $\dim G_\alpha = \text{Card}\, \mathcal{F}_\alpha = 3$

⚠ ne pas confondre Card et dim

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha), \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + y + z = 0, 3y + 2z = 0\}$$

4. [/2 pts] $\boxed{\text{Pour } \alpha = 1}$, donner une base et la dimension de G_1. Déterminer une équation de G_1.

⚠ ce n'est pas G_1 qui est génératrice, c'est F_1

- À nouveau, par définition de Vect, $\mathcal{F}_1 = \{u_1, u_2, v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice de G_1
- Mais ce n'est pas une famille libre : on a trouvé en (2) que

$$5u_1 - 3u_2 + v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $v_1 = 3u_2 - 5u_1 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$

et donc $G_1 = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1) = \text{Vect}(u_1, u_2)$

→ $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de G_1, libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de G_1 et $\dim G_1 = \text{Card}(\{u_1, u_2\}) = 2$

optionnel, on l'a vu

Déterminons une équation de G_1. Puisque $G_1 = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1)$
on a $u=(x,y,z) \in G_1 \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \mu$ tq $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu v_1$

$\iff$ le système $(S_u) = \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu = x \\ \lambda_2 + 3\mu = y \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu = z \end{cases}$ a des solutions. Or,

la colonne bleu clair n'est pas nécessaire je l'ai mis au cas où vous n'auriez pas trouvé que $\{u_1, u_2\}$ est une base

$(S_u) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu = x \\ \lambda_2 + 3\mu = y \\ -\lambda_2 - 3\mu = z + x \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu = x \\ \lambda_2 + 3\mu = y \\ 0 = x + y + z \end{cases}$ échelonné !

Donc (S_u) a des solutions ssi $x+y+z=0$

càd $u \in G_1$ ssi $x+y+z=0$ ← C'est donc une équation de G_1

$\rightarrow G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \text{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha), \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, -x+y+z=0, 3y+2z=0\}$$

5. [/**1.5 pt**] $\boxed{\text{Pour } \alpha = 1}$ Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G_1$.

Il y a plein de façons de faire voici les principales

Méthode 1 $\quad \mathbb{R}^3 = H \oplus G_1 \iff \begin{cases} H \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ H + G_1 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

- Déterminons $H \cap G_1$.

Méthode 1a $\quad u \in H \cap G_1 \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ déf de H ; ← éq. de G_1 obtenue en (4)

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2}{\iff} \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+z=0 \\ \frac{4}{3}z=0 \end{cases}$

$\iff x=y=z=0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^3}$

Méthode 1b $\quad u \in H \cap G_1 \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+2z=0 \\ u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu v_1 \end{cases}$ ← pas nécessaire vu que $G_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$

$\iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3y+2z=0 \\ x = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu \\ y = \lambda_2 + 3\mu \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu + \lambda_2 + 3\mu - \lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu = 0 \\ 3\lambda_2 + 9\mu - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\mu = 0 \\ x = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu,\ y = \lambda_2 + 3\mu\ \ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\mu = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\mu = 0 \\ x = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu \\ y = \lambda_2 + 3\mu \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu = 0 \\ \lambda_2 + 3\mu = 0 \\ x = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu \\ y = \lambda_2 + 3\mu \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 + 5\mu \\ \lambda_2 = 0 - 3\mu \\ x = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu \\ y = \lambda_2 + 3\mu \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 5\mu - 3\mu - 2\mu = 0 \\ y = 0 - 3\mu + 3\mu = 0 \\ z = 0 - 5\mu + 6\mu - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

→ Dans tous les cas on trouve $H \cap G_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On peut aussi le faire par analyse-synthèse mais c'est très pénible

• Déterminons $H + G_1$

↳ On a $\dim(H+G_1) = \dim H + \dim G_1 - \dim(H \cap G_1) = 1 + 2 - 0$ d'après (1), d'après (4), d'après le calcul ci-dessus

$= 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc $H + G_1$ est un sev de dim 3 dans $\mathbb{R}^3$ → $H + G_1 = \mathbb{R}^3$

⟹ Donc $\mathbb{R}^3 = H \oplus G_1$

Méthode 2 On a obtenu que $\mathcal{B}_H = \{u_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)\}$ est une base de H

$\mathcal{B}_{G_1} = \{u_1, u_2\}$ est une base de G_1

→ $\mathbb{R}^3 = H \oplus G_1$ ssi $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_{G_1}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Montrons que $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_{G_1} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{4}{3}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \frac{4}{3}\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_3 = 0 \\ \frac{2}{3}\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_G$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_G) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc $\mathcal{B}_H \cup \mathcal{B}_G$ est une base

→ $\mathbb{R}^3 = H \oplus G_1$

Exercice 1 (/9 points)) On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_\alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on introduit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$

$$G_\alpha = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_\alpha), \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, -x+y+z=0, 3y+2z=0\}$$

6. [/1 pt] **Question de cours :** Qu'appelle-t-on "*base canonique de* $\mathbb{R}^3$" ? $\boxed{\text{Pour } \alpha = 0}$, donner la *matrice de passage* de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{F}_0$.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille de vecteurs

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ce n'est pas la matrice identité, même si c'est lié !

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

→ La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{F}_0$ est la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}_0$ dans la base $\mathcal{B}_0$

Or $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\, e_1 + 0\, e_2 + (-1) e_3$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\, e_1 + 1\, e_2 + (-2) e_3$

$u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) e_1 + 0\, e_2 + 1\, e_3$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (/11 points)) On considère, pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

1. [/1 pt] **Pour** $\beta = 0$: montrer que A_0 est inversible et déterminer son inverse.

mais ceci n'est pas nécessaire si on trouve A^{-1}, par ex avec Gauss, c'est donc que A_0 est inversible! Donc ceci n'était bien sûr pas demandé, je le mets pour ceux qui l'on fait.

Pour montrer que A_0 est inversible, on peut calculer son déterminant

$$\det A_0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-6 \times 3 - 6 \times (-4)) = -(-18 + 24) = -6$$

$\neq 0$ donc A_0 inversible

Calculons A_0^{-1} avec Gauss

$$A_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = I_3$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow -L_1$, $L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2$,
$L_3 \leftarrow -L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} +1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$I_3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -1 & -1/2 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 2/3 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \right. = A_0^{-1}$$

(et du coup A_0 est inversible)

On peut vérifier :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 2/3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Exercice 2 (/11 points)) On considère, pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

2. [/2 pts] **Pour** $\beta = 1$: Calculer A_1^2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1, A_1^k = (-2)^{k-1} A_1$.

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+3 & -1-4+3 & -1-2+1 \\ 2+8-6 & -2+16-6 & -2+8-2 \\ -3-6+3 & 3-12+3 & 3-6+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix} = -2A_1$$

Montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{P}(k) : A_1^k = (-2)^{k-1} A_1$

⚠ L'initialisation, c'est $k=1$, pas $k=2$ qui avait de calculer

Initialisation $\boxed{k=1}$ $A_1^1 = A_1 = 1.A_1 = (-2)^0 A_1 = (-2)^{1-1} A_1$ ✓

Hérédité Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$

On a $A_1^{k+1} = A_1^k . A_1 = (-2)^{k-1} A_1 . A_1$

$= (-2)^{k-1} A_1^2 = (-2)^{k-1} \times (-2) A_1$

$= (-2)^k A_1 = (-2)^{(k+1)-1} A_1$ ✓

→ On a donc bien, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_1^k = (-2)^{k-1} A_1$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_\beta : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+y+z, -2x-4y-2z, 3x+3y+\beta z) \in \mathbb{R}^3$$

3. **[/1 pt]** Montrer que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, f_β est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Il n'est pas nécessaire de mq $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ (mais c'est vrai que toutes les app linéaires le vérifient !)

f_β est une application $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donc il s'agit de montrer que f_β est linéaire

Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z')$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

règles de calcul sur les matrices

$$f_\beta(u + \lambda v) = A_\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda A_\beta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= f_\beta(u) + \lambda f_\beta(v)$$

Donc f_β est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc f_β est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

même ev de départ et d'arrivée

$$f_\beta : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+y+z, -2x-4y-2z, 3x+3y+\beta z) \in \mathbb{R}^3$$

4. **[/2 pts]** $\boxed{\text{Pour } \beta \neq 1}$, déterminer $\operatorname{Ker} f_\beta$, $\operatorname{Im} f_\beta$ et le rang de f_β.

$\beta \neq 1$

- $\operatorname{Ker} f_\beta = \{u \in \mathbb{R}^3, f_\beta(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc

$$u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f_\beta \iff f_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -2x-4y-2z = 0 \\ 3x+3y+\beta z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -6y-4z = 0 \\ 6y + (\beta+3)z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -6y-4z = 0 \\ (\beta-1)z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{\beta-1}}{\iff} \begin{cases} x = y+z = 0 \\ y = -\frac{2}{3}z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ok car $\beta - 1 \neq 0$!

$\iff u = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\operatorname{Ker} f_\beta = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

- Par le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f_\beta + \operatorname{rg} f_\beta$

donc $\operatorname{rg} f_\beta = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f_\beta = 3 - 0$

$\rightarrow \operatorname{rg} f_\beta = \dim \operatorname{Im} f_\beta = 3$

- Du coup, $\operatorname{Im} f_\beta$ est un sev de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$, donc nécessairement, $\operatorname{Im} f_\beta = \mathbb{R}^3$

Si on a oublié cette histoire de dimension, pour déterminer

$$\mathrm{Im} f_\beta = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists u \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(u) = v\}$$

on peut procéder comme ceci : Soit $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, alors

Méthode 1

$v \in \mathrm{Im} f_\beta \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f_\beta(x,y,z) = (a,b,c)$

$\iff$ Le système $(S_v) = \begin{cases} -x+y+z = a \\ -2x-4y-2z = b \\ 3x+3y+\beta z = c \end{cases}$ a des solutions

Or $(S_v) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = a \\ -6y-4z = b-2a \\ 6y+(\beta+3)z = c+3a \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = a \\ -6y-4z = b-2a \\ (\beta-1)z = a+b+c \end{cases}$

Or $(\beta-1) \neq 0$ donc on peut faire

$\iff \begin{cases} x = -a + y + z = a+b-2a - \frac{2}{3(\beta-1)}(a+b+c) + \frac{1}{\beta-1}(a+b+c) \\ y = b-2a - \frac{2}{3}z = b-2a - \frac{2}{3(\beta-1)}(a+b+c) \\ z = \frac{1}{\beta-1}(a+b+c) \end{cases}$

$\to \forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, (S_v) admet des solutions, donc $v \in \mathrm{Im} f_\beta$

donc $\mathrm{Im} f_\beta = \mathbb{R}^3$

⚠ Ne pas confondre $\mathrm{Im} f_\beta$ et $\mathrm{rg} f_\beta$
→ $\mathrm{Im} f_\beta$ est un ensemble pas un nombre.

Méthode 2

$v \in \mathrm{Im} f_\beta \iff \exists x,y,z \in \mathbb{R}^3$ tq

$v = f(x,y,z) = (-x+y+z, -2x-4y-2z, 3x+3y+\beta z)$

$= x(-1,-2,3) + y(1,-4,3) + z(1,-2,\beta)$

$\iff v \in \mathrm{Vect}\left(\underset{w_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix}}\right)$

Or, $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille libre : $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \beta\lambda_3 = 0 \end{cases}$

C'est le système qu'on a résolu pour $\mathrm{Ker} f_\beta$!

$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

et $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre

(Sinon il faut aussi montrer qu'elle est génératrice) → Comme $\mathrm{Card}(\{w_1, w_2, w_3\}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, et donc

$$\mathrm{Im} f_\beta = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3) = \mathbb{R}^3$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_\beta : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-x+y+z, -2x-4y-2z, 3x+3y+\beta z) \in \mathbb{R}^3$$

5. [/2 **pts**] $\boxed{\text{Pour } \beta = 1}$, montrer que $\operatorname{Ker} f_\beta = H$ (de l'exercice précédent). Donner une base de $\operatorname{Im} f_\beta$ et le rang de f_β.

• Cette fois, $\forall u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$u \in \operatorname{Ker} f_1 \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -2x-4y-2z = 0 \\ 3x+3y+z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -6y-4z = 0 \\ 6y+4z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ +3y+2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} f_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z=0,\ 3y+2z=0\} = H$

• D'après le théorème du rang, on a donc

$$\operatorname{rg} f_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim H \underset{\text{d'après l'ex 1}}{=} 3 - 1$$

$\longrightarrow \operatorname{rg} f_1 = 2$

• Déterminons $\operatorname{Im} f_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists u \in \mathbb{R}^3, f_1(u) = v\}$

Méthode

$v = (a,b,c) \in \operatorname{Im} f_1 \iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f_1(x,y,z) = v$

$\iff$ Le système $(S_v) \begin{cases} -x+y+z = a \\ -2x-4y-2z = b \\ 3x+3y+z = c \end{cases}$ a des solutions

Or $(S_v) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = a \\ -6y-4z = b-2a \\ 6y+4z = c+3a \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x+y+z = a \\ -6y-4z = b-2a \\ 0 = a+b+c \end{cases}$ échelonné !

a des solutions ssi $a+b+c=0$

Donc $v \in \operatorname{Im} f_1$ ssi $a+b+c=0$

$$\operatorname{Im} f_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a+b+c=0\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a=-b-c\}$$
$$= \{(-b-c, b, c),\ b,c \in \mathbb{R}\} = \left\{ b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Im} f_\beta = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f_1$, libre car ces vecteurs ne sont pas colinéaires

$\rightarrow$ c'est une base de $\operatorname{Im} f_1$

Méthode 2 :

$v \in \mathrm{Im} f_\beta \iff \exists x, y, z \in \mathbb{R}^3$ tq

$v = f(+x, y, z) = (-x+y+z, -2x-4y-2z, 3x+3y+z)$

$= x(-1,-2,3) + y(1,-4,3) + z(1,-2,1)$

$\iff v \in \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}}_{\tilde{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}}_{\tilde{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\tilde{w}_3}\right)$ donc $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3\}$ engendre $\mathrm{Im} f_1$

Mais, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \tilde{w}_1 + \lambda_2 \tilde{w}_2 + \lambda_3 \tilde{w}_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

C'est le système qu'on a résolu pour $\mathrm{Ker} f_1$

$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3}\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_3 \end{cases}$

Par ex, pour $\lambda_3 = 3$, on trouve que $\tilde{w}_1 - 2\tilde{w}_2 + 3\tilde{w}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow \tilde{w}_1 = 2\tilde{w}_2 - 3\tilde{w}_3$

On vérifie :

$2\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ✓

Donc $\mathrm{Im} f_1 = \mathrm{Vect}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$

$= \mathrm{Vect}(\tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$

$\rightarrow \left\{\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix}+1\\-4\\3\end{pmatrix}, \tilde{w}_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f_1$

libre car $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ non colinéaires

$\rightarrow$ C'est une base de $\mathrm{Im} f_1$

Rq Avec les 2 méthodes, on obtient une base à 2 éléments de $\mathrm{Im} f_1$

donc on retrouve $\mathrm{rg} f_1 = \dim \mathrm{Im} f_1 = 2$

6. **[/1 pt]** Déduire des deux questions précédentes les valeurs de β pour lesquelles f_β est un isomorphisme.

C'est à dire une application linéaire bijective

- Pour $\beta \neq 1$, $\mathrm{Ker} f_\beta = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f_β injective
  $\mathrm{Im} f_\beta = \mathbb{R}^3$ donc f_β surjective
  $\Big\}$ f_β est un isomorphisme

- Pour $\beta = 1$ $\mathrm{Ker} f_\beta = H \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f_β n'est pas injective
  $\rightarrow f_\beta$ n'est pas un isomorphisme

Donc f_β est un isomorphisme ssi $\beta \neq 1$

7. **[/1 pt]** $\boxed{\text{Pour } \beta = 1}$, donner l'expression de $f_1 \circ f_1$ et $\underbrace{f_1 \circ \ldots \circ f_1}_{k \text{ fois}}$.

Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$f_1\circ f_1(u) = f_1(f_1(u)) = f_1(A_1\cdot u) = A_1A_1u = A_1^2u \quad \text{d'après (2)}$$
$$= -2A_1u$$
$$= -2f_1(u)$$
$$= (2x-2y-2z,\ 4x+8y+4z,\ -6x-6y-2z)$$

De même, $\underbrace{f_1\circ \ldots \circ f_1}_{k \text{ fois}}(u) = \overbrace{A_1\cdot A_1\cdot \ldots \cdot A_1}^{k \text{ fois}}u$

$$= A_1^k u \quad \text{par (2)}$$
$$= (-2)^{k-1}A_1u$$
$$= (-2)^{k-1}f_1(u)$$
$$= (-2)^{k-1}(-x+y+z,\ -2x-4y-2x,\ 3x+3y+z)$$

8. **[/1 pt] Question de cours :** Justifier que A_β est la matrice de f_β dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Expliquer par quelles étapes passer pour obtenir la matrice de f_β dans la base $\mathscr{F}_0$ de l'exercice précédent.

On a, en notant $\mathcal{B}_0=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

- $f_\beta(e_1)=f(1,0,0)=(-1,-2,3)=(-1)e_1+(-2)e_2+3e_3$

  $f_\beta(e_2)=f(0,1,0)=(1,-4,3)=1e_1+(-4)e_2+3e_3$

  $f_\beta(e_3)=f(0,0,1)=(1,-2,\beta)=1e_1+(-2)e_2+\beta e_3$

Donc la matrice de f_β dans la base $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & -4 & -2\\ 3 & 3 & \beta\end{pmatrix}=A_\beta$

- Pour trouver la matrice de f_β dans la base $\mathcal{F}_0$, on peut

formule de changement de base

Méthode 1 Utiliser la matrice de passage P de l'ex 1.6 : on a $[f_\beta]_{\mathcal{F}_0}=P^{-1}A_\beta P$

Méthode 2 ① Calculer $f_\beta(u_1), f_\beta(u_2), f_\beta(v_0)\in\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{F}_0=\{u_1,u_2,v_0\}$)

② Trouver leurs coordonnées dans la base $\mathcal{F}_0$

③ Mettre ces coordonnées en colonnes.