

Epreuve de seconde session

Durée : 2h.

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Explicitiez votre raisonnement, même s'il n'a pas abouti.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

et on introduit

$$F = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, Au = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}, \quad G = \text{Vect} \left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

ainsi que

$$f : u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Partie 1 : Matrices

1. Calculer A^2 et A^3 . En déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner $\text{Tr}(({}^tA)^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On note $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xc_1 + yc_2 + zc_3$.

Partie 2 : Sous-espaces vectoriels

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base et la dimension de F . Donner un vecteur non nul $u_0 \in F$.
3. En déduire que la famille $\{c_1, c_2, c_3\}$ est liée.
4. Donner une base et la dimension de G .
5. Montrer que $\mathcal{B}_1 = \{u_0, v_1, v_2\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Partie 3 : Applications linéaires

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(u_0)$. En déduire $\text{rg } f$.
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(c_1, c_2, c_3)$.
4. f est-elle surjective ? injective ? bijective ?
5. Justifier que la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est A .
6. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$ en fonction de u_0, v_1, v_2 .
7. En déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B}_1 .