Algèbre Linéaire 1 - Session 2 2023 - Corrigé

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Partie 1 : Matrices

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On calcule

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 4+10-1 & 4+2-10 & -4-6+6 \\ 10+5-3 & 10+1-15 & -10-3+9 \\ 2+25-3 & 2+5-15 & -2-15+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^3 = A^2 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6-5-1 & 6-1-5 & -6+3+3 \\ 6-5-1 & 6-1-5 & -6+3+3 \\ 12-10-2 & 12-2-10 & -12+6+6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Montrons par récurrence que, $\forall n \geqslant 3$, $A^n = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- $\boxed{n=3}$ fait
- $\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Supposons que $A^n = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Alors
  $A^{n+1} = A^n \cdot A = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \cdot A = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

→ On a donc

$$A^n = \begin{cases} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n=0 \\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} & \text{si } n=1 \\ A^2 = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} & \text{si } n=2 \\ O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}$$

2. Donner $\mathrm{Tr}(({}^tA)^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* attention aux parenthèses !

On sait que $({}^tA)^n = {}^t(A^n)$* et $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tM) = \mathrm{Tr}(M)$

Donc $\mathrm{Tr}(({}^tA)^n) = \mathrm{Tr}({}^t(A^n)) = \mathrm{Tr}(A^n) = \begin{cases} \mathrm{Tr}(I_3) = 3 & \text{si } n=0 \\ \mathrm{Tr}(A) = 2+1-3=0 & \text{si } n=1 \\ \mathrm{Tr}(A^2) = 12-4-8=0 & \text{si } n=2 \\ \mathrm{Tr}(A^n) = 0+0+0=0 & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}$

somme des coeff de la diagonale

3. On note $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xc_1 + yc_2 + zc_3$.

Rq Le produit d'une matrice par un vecteur donne donc une combinaison linéaire des colonnes de A

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-2z \\ 5x+y-3z \\ x+5y-3z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2x \\ 5x \\ 1x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ 1y \\ 5y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ -3z \\ -3z \end{pmatrix}$

$= x\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=c_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=c_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=c_3}$ ✓

Partie 2 : Sous-espaces vectoriels

$$F = \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, Au = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}, \quad G = \text{Vect}\left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

. .

Pour savoir si un vecteur $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ appartient à F, on calcule $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b-2c \\ 5a+b-3c \\ a+5b-3c \end{pmatrix}$ si ça fait $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v \in F$ sinon $v \notin F$

ex $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a • $A \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$

• Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v \in F$

On calcule $A \cdot (u+\lambda v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{le produit matriciel est distributif}}}{=} Au + A(\lambda v) = \underbrace{Au}_{\substack{=0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{car } u \in F}} + \lambda \underbrace{Av}_{\substack{=0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{car } v \in F}} = 0_{\mathbb{R}^3} + \lambda 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ u + \lambda v \in F$

Donc F est non vide et stable par combinaison linéaire : F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2. Déterminer une base et la dimension de F. Donner un vecteur non nul $u_0 \in F$.

On cherche une famille de vecteurs $\{u_1 \dots u_p\}$ tq • $F = \text{Vect}(u_1 \dots u_p)$ (ie $\{u_1 \dots u_p\}$ engendre F)
• $\{u_1 \dots u_p\}$ est libre

Or, si on prend $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$u \in F \iff Au = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{cases} 2x+2y-2z = 0 \\ 5x+y-3z = 0 \\ x+5y-3z = 0 \end{cases}}_{(S)}$

$$(S) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x+y-z=0 \\ 5x+y-3z=0 \\ x+5y-3z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -4y+2z=0 \\ 4y-2z=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2(-2y+z)=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z-y = 2y-y = y \\ z = 2y \end{cases} \iff u = (y, y, 2y) = y(1,1,2)$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}((1,1,2))$$

⚠ $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ n'est pas libre, ça ne peut donc pas être une base de F

Donc $F = \mathrm{Vect}((1,1,2))$. $\{(1,1,2)\}$ engendre F, et c'est une famille libre puisque $(1,1,2) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow$ $\{(1,1,2)\}$ est une base de F

et $\dim F = \mathrm{Card}(\{(1,1,2)\}) = 1$

$\rightarrow$ De plus, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de F.

3. En déduire que la famille $\{c_1, c_2, c_3\}$ est liée.

D'après la question (3) de la partie 1, $\forall u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$u \in F \iff Au = 0_{\mathbb{R}^3} \iff x c_1 + y c_2 + z c_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Pas besoin d'avoir trouvé u_0 pour faire ce raisonnement !

Donc, puisque $u_0 = (\overset{1}{x_0}, \overset{1}{y_0}, \overset{2}{z_0}) \in F \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, x_0, y_0, z_0 ne sont pas tous nuls et on a $x_0 c_1 + y_0 c_2 + z_0 c_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow$ $\exists x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ non tous nuls tq $x_0 c_1 + y_0 c_2 + z_0 c_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

C'est exactement ce que veut dire $\{c_1, c_2, c_3\}$ est liée.

Vérification $\overset{x_0}{1}.c_1 + \overset{y_0}{1}.c_2 + \overset{z_0}{2}.c_3 = 1.\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

4. Donner une base et la dimension de G.

$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ engendre G

Mais elle n'est pas libre : $v_3 = -2v_1$

donc $\underbrace{2}_{\lambda_1} v_1 + \underbrace{0}_{\lambda_2} v_2 + \underbrace{1}_{\lambda_3} v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pas tous nuls

$\rightarrow$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée

Si on n'a pas remarqué ça, on peut le retrouver avec un système :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ceci équivaut à $\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ Donc il y a des solution non nulles, par ex $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

$\rightarrow$ $2v_1 + 0 v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, ie $v_3 = -2v_1 + 0 v_2$

$\rightarrow$ v_3 est combinaison linéaire des 2 autres, donc

$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de G

libre car c'est une famille à 2 vecteurs non colinéaires

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de G et

et $\dim G = \mathrm{Card}(\{v_1, v_2\}) = 2$

5. Montrer que $\mathscr{B}_1 = \{u_0, v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que $\mathrm{Card}\, \mathscr{B}_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Si vous avez trouvé un autre u_0, par ex $u_0 = (1/2, 1/2, 1)$ ou $u_0 = (2, 2, 4)$ ça marche aussi !

Soient $\mu_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

$\mu_0 u_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_0 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \mu_0 = 0 \\ 2\mu_0 - 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ $\mathscr{B}_1$ est une famille libre à 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

• Si on a oublié cette histoire de dimension, il faut aussi mq $\mathcal{B}_1$ est génératrice. Soit donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on cherche $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tq $u = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Or ceci équivaut à $\begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ \lambda_0 = y \\ 2\lambda_0 - 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = y \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = x - \lambda_0 = x - y \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = z - 2\lambda_0 = z - 2y \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_0 = y \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = x - y \\ -\lambda_2 = z - 2y - 3(x-y) = -3x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = y \\ \lambda_1 = 3\lambda_2 - x + y = 8x - 2y - 3z \\ \lambda_2 = 3x - y - z \end{cases}$

→ Quels que soient (x, y, z), le système admet une solution donc $\mathcal{B}_1$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On a obtenu en 2. que $\mathcal{B}_F = \{u_0\}$ est une base de F

et en 4. que $\mathcal{B}_G = \{v_1, v_2\}$ ——— G

Enfin, on a montré en 5. que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}^3$ càd l'union d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^3$

Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Si on a oublié cet utile théorème, on peut aussi montrer que
① $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et ② $F + G = \mathbb{R}^3$

mais on a vu que v_3 ne sert à rien

Montrons ① Soit $u \in F \cap G$. Alors $\begin{cases} u \in F \text{ donc } Au = 0_{\mathbb{R}^3} \\ u \in G \text{ donc } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \end{cases}$

Donc $A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_2 \quad) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2 + \lambda_3 A v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (*)

Or $Av_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 \\ +4 \\ +8 \end{pmatrix}$ $\quad Av_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$ C.

$Av_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$

Donc (*) $\iff \begin{cases} 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_3 = 0 \\ 8\lambda_1 - 12\lambda_2 + 16\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\lambda_1 - 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 - 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff u = \lambda_3\left(-2\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $u \in F\cap G$ ssi $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ ie $F\cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Montrons ② On a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F\cap G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc $F+G$ est un sev de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$

donc $F+G = \mathbb{R}^3$

Et ① et ② nous donnent $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$

Partie 3 : Applications linéaires

$$f : u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que f est linéaire.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

le produit matriciel est distributif

$f(u+\lambda v) = A\cdot(u+\lambda v) = Au + A(\lambda v) =$
$= Au + \lambda Av = f(u) + \lambda f(v)$

$\rightarrow f$ est linéaire.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_0)$. En déduire $\operatorname{rg} f$.

c'est l'équation de F

Par définition du noyau de f, $u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\iff Au = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\iff u \in F$

Donc $\operatorname{Ker} f = F = \operatorname{Vect}(u_0)$

(D'après la question 2. de la partie 2)

Par le théorème du rang, on a

$\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim F = 3 - 1 = 2$

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, c_3)$.

Par définition de l'image de f, pour tout $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$v \in \mathrm{Im}(f) \iff$ Il existe $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq $f(u) = v$

$\iff$ Il existe x, y, z 3 réels tq $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v$ D'après la question 3 de la partie 1

$\iff$ Il existe x, y, z réels tq $xc_1 + yc_2 + zc_3 = v$

$\iff v \in \mathrm{Vect}(c_1, c_2, c_3)$

Autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, c_3)$

4. f est-elle surjective ? injective ? bijective ?

- $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(u_0) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ Donc f n'est pas injective
- $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$ Donc f n'est pas surjective

$\Longrightarrow$ Donc f n'est pas (du tout) bijective

5. Justifier que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

Notons $\mathcal{B}_0 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a
- $f(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 5e_2 + 1e_3$
- $f(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2e_1 + 1e_2 + 5e_3$
- $f(e_3) = Ae_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -2e_1 + (-3)e_2 + (-3)e_3$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = A$$

6. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$ en fonction de u_0, v_1, v_2.

$$f(v_1) = A.v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4u_0$$

$$f(v_2) = Av_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 4v_1$$

7. En déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1$.

On a $u_0 \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(u_0) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0u_0 + 0v_1 + 0v_2$

et on a vu en 6. que $f(v_1) = 4u_0 = 4u_0 + 0v_1 + 0v_2$

et $f(v_2) = 4v_1 = 0u_0 + 4v_1 + 0v_2$

Donc $[f]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$