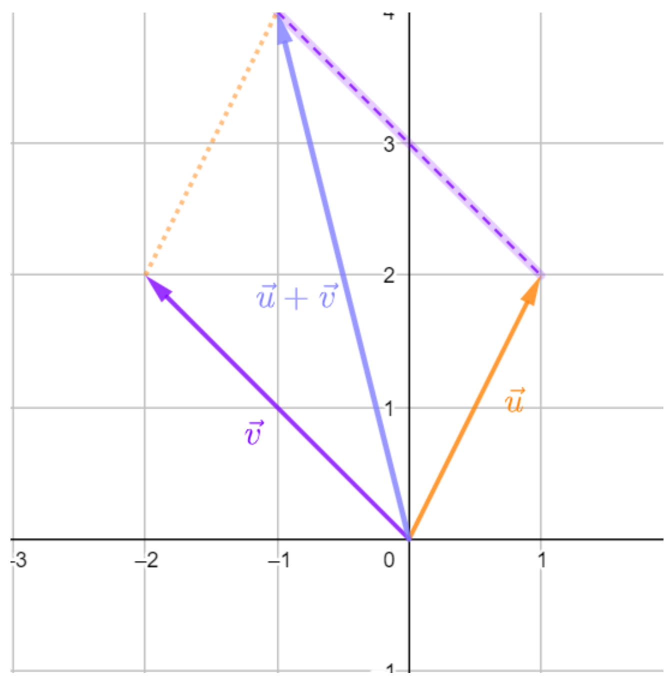
Algèbre linéaire 1

L1 MIASHS



Caroline Vernier (caroline.vernier@univ-paris1.fr)

Bureau C.20.10

Chapitre I - Systèmes d'équations linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Motivation : En mathématiques, le but du jeu est souvent de résoudre une équation, ou plusieurs (on parle alors de *système* d'équations). Et généralement, cela n'a rien d'évident :

Quelles sont les solutions de
$$\begin{cases} \sin(x)e^y - 3x\cos(xy) = 2 \\ 4x^y + \pi y^x = 56 \end{cases}$$

...Moi non plus.

Les systèmes d'équations *linéaires* sont un cas plus agréable :

- Ils ont des applications dans de nombreux domaines scientifiques
- Ils sont à la base des calculs en *algèbre linéaire*.
- On sait les résoudre !

Dans ce chapitre, on va donc apprendre le vocabulaire et la méthode de résolution de ces systèmes.

Systèmes à 2 équations, 2 inconnues

Définition 1

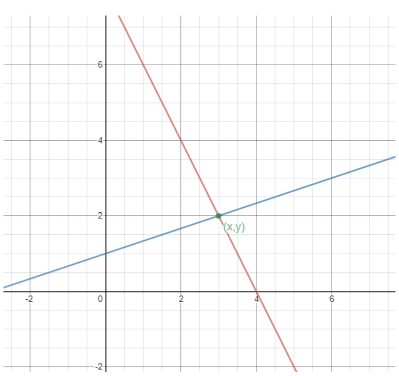
Un système linéaire *à deux équations et deux inconnues x et y est un système de la forme*
$$(S)\begin{cases} ax & + & by & = & m \\ cx & + & dy & = & p \end{cases}$$

Résoudre le système revient à trouver tous les couples de réels (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations de (S). Voyons comment interpréter cette situation.

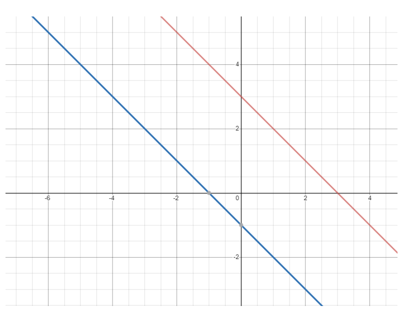
Première approche : Ligne par ligne

Les lignes de (S) sont les équations des droites :
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = m\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, cx + dy = p\}.$$

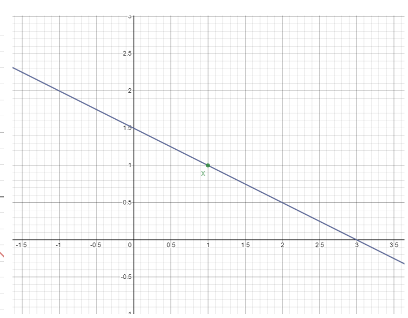
$\rightsquigarrow$ Une solution de (S) est donc un point d'intersection de D_1 et D_2. Trois cas se présentent donc :



D_1 et D_2 sécantes :
$\rightsquigarrow$ unique solution



D_1 et D_2 parallèles :
$\rightsquigarrow$ pas de solution



D_1 et D_2 confondues :
$\rightsquigarrow$ infinité de solutions

Deuxième approche : Colonne par colonne

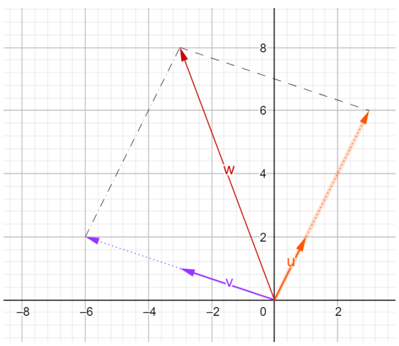
D'un autre côté, considérons les coefficients du système en colonne :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & m \\ cx & + & dy & = & p \end{array}\right.$$

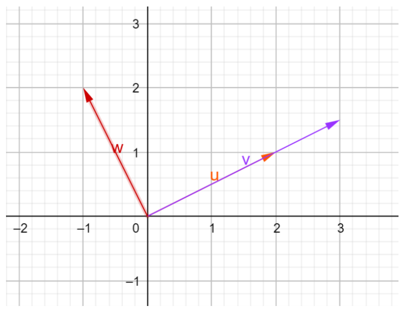
On note $\vec{u}=(a,c)$, $\vec{v}=(b,d)$ et $\vec{w}=(m,p)$. Alors (S) équivaut à

$$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{w}.$$

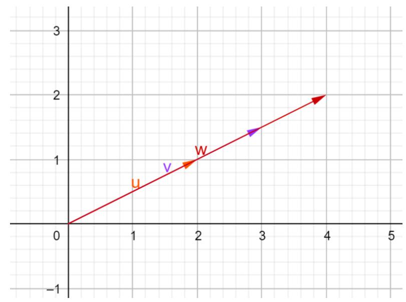
A nouveau, trois cas se présentent :



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un repère :
$\rightsquigarrow$ unique solution



$\vec{u}$, $\vec{v}$ colinéaires mais pas $\vec{w}$:
$\rightsquigarrow$ pas de solution



$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires :
$\rightsquigarrow$ infinité de solution

Troisième approche : Par le calcul

Enfin, on peut résoudre le système par le calcul. On peut supposer que $a \neq 0$, et alors

$$\begin{cases} ax+by & = m \\ a(cx+dy) & = ap \end{cases} \quad L_2 \leftarrow aL_2$$

On peut alors utiliser la première ligne pour "se débarrasser de x" dans la deuxième :

$$\begin{cases} ax+by & = m \\ a(cx+dy)-c(ax+by) & = ap-cm \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - cL_1$$

$$\begin{cases} ax+by & = m \\ (ad-bc)y & = ap-cm \end{cases}$$

Tout dépend donc de $ad-bc$:

- Si $ad-bc \neq 0$, il y a une unique solution :

$$y=\frac{ap-cm}{ad-bc},\ x=\frac{md-bp}{ad-bc}$$

- Si $ad-bc=0$, deux cas se présentent :
  - Soit $ap-cm \neq 0$. Auquel cas le système n'a aucune solution.
  - Soit $ap-cm=0$. Alors le système est équivalent à $ax+by=m$, ou encore $x=\frac{m}{a}-\frac{b}{a}y$. Il y a alors une infinité de solutions : chaque choix de y donne un x tel que (x,y) soit solution de (S) (on dira que y est une inconnue libre).

Le cas général : Systèmes à n équations, p inconnues

Définition 2

- *On appelle* ***équation linéaire*** *d'inconnues* $(x_1, \dots, x_p)$ *toute équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_px_p = b.$$

où $a_1, \dots, a_p, b \in \mathbb{K}$.

- *Un* ***système de*** n ***équations linéaires à*** p ***inconnues*** *est une liste de* n *équations linéaires :*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *sont appelés les* ***coefficients*** *de* (S), *les* $b_i \in K$ *forment le* ***second membre****.*

Exemple 1 (*Exemples et contre-exemples*)

1. $8x + \sqrt{2}y - 55z = 1$ *: Linéaire ? Vrai* □ *Faux* □
2. $\sqrt{x} - 3y = 2$ *: Linéaire ? Vrai* □ *Faux* □
3. $$\left\{\begin{array}{rcrcc} 3x & - & 4y & = & \frac{1}{7} \\ \sqrt{5}x & + & e^{13}y & = & \frac{\pi}{6} \\ \sin(1)x & - & 2y & = & 54 \end{array}\right.$$

   Linéaire ? Vrai □ *Faux* □
4. $$\begin{cases} xy + 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

   Linéaire ? Vrai □ *Faux* □

Définition 3

- *Une* ***solution*** *de* (S) *est un* p*-uplet* $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{K}^p$ *vérifiant simultanément les* n *équations linéaires qui composent* (S)*. L'****ensemble des solutions de*** (S) *est, sans grande surprise, l'ensemble de tous ces* p*-uplets.*
- *Résoudre un système linéaire consiste à donner l'ensemble des solutions (sous une forme explicite).*
- *Deux systèmes* (S) *et* (S') *sont* ***équivalents*** *s'ils ont le même ensemble de solutions :*

$$(s_1, \dots, s_p) \text{ solution de } (S) \iff (s_1, \dots, s_p) \text{ solution de } (S')$$

Systèmes échelonnés

Avant de s'attaquer à la résolution générale de systèmes linéaires, voyons un cas facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

qui nous donne, en remontant, une unique solution : $(1, -3, 3)$.

Par contre, le système suivant n'a aucune solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \\ & & 2x_2 & = & 4 \\ & & 0 & = & 25 \end{array}\right.$$

Un chouïa plus dur, mais pas beaucoup plus :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 6 \\ & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Résolution :

Définition 4

- *Un système linéaire est* ***échelonné*** *si le nombre de coefficients nuls en début d'équation croît strictement à chaque ligne.*
- *Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé* ***"pivot"***.
- *On appelle* ***rang*** *du système le nombre de pivots.*

Exemple 2

Le système à 4 inconnues et 3 équations suivant est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & & & + & 5x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

$\rightsquigarrow$ *Ce système est de rang* $\boxed{}$.

Plus généralement, un système échelonné est de la forme

$$(SE)\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \quad\quad + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + \quad\quad + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ \quad\quad a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rp}x_p & = b_r \\ \quad\quad\quad 0 & = b_{r+1} \\ & \vdots \\ \quad\quad\quad 0 & = b_n \end{array}\right.$$

$\rightsquigarrow$ Le rang du système est l'entier r.

Définition 5

On appelle ***inconnues principales*** *les inconnues $x_1, x_{j_2} \dots x_{j_r}$ qui correspondent à un pivot et* ***inconnues libres*** *les autres inconnues.*

On a donc

$$\boxed{r \leq n} \quad \boxed{r \leq p} \quad \boxed{p = r + \text{ nb d'inconnues libres}}$$

Résolution des systèmes échelonnés

L'avantage des systèmes échelonnés, c'est qu'ils sont faciles à résoudre. On distingue différents cas :

- Si l'un des $b_{r+1}, \dots, b_n$ est non nul, **le système n'a pas de solution**. Ce cas ne se produit que si $r < n$.
- Sinon, $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, et, en ôtant les (éventuelles) lignes inutiles $0 = 0$, notre système échelonné est équivalent à

$$(SE')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \quad\quad + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + \quad\quad + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ \quad\quad a_{rj_r}x_{j_r} + \dots + a_{rp}x_p & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Deux cas se présentent alors :

- si $r = p$:

$$(SE')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \quad\quad + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + \quad\quad + a_{2p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ \quad\quad a_{rr}x_r & = b_r \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Le système admet une **unique solution**, qu'on obtient "en remontant".

- si $r < p$, les inconnues $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$ sont libres. On les "passe de l'autre côté'

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j_r}x_{j_r} & = b_1 - a_{1j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{1p}x_p \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a_{2j_r}x_{j_r} & = b_2 - a_{2j_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{2p}x_p \\ & \vdots \\ \quad\quad a_{rj_r}x_{j_r} & = b_r - a_{rj_{r+1}}x_{j_r+1} - \dots - a_{rp}x_p \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Le système admet **une infinité de solutions**, une pour chaque $(p-r)$-uplet $(x_{j_{r+1}}, \dots, x_p)$ possible.

Exemple 3

Considérons à nouveau le système :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5x_4 - 3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 = \frac{5-x_4}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 + 4x_4 \\ x_2 = \frac{5-x_4}{2} \\ x_3 = \frac{5-x_4}{6} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *Pour chaque $x_4 \in \mathbb{R}$, on obtient donc une solution du système. Il y a donc une infinité de solutions, et l'ensemble des solutions est*

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(2 + 4x_4, \frac{5-x_4}{2}, \frac{5-x_4}{6}, x_4 \right), x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ *Par exemple* $\boxed{(\quad,\quad,\quad,\quad)}$ *et* $\boxed{(\quad,\quad,\quad,\quad)}$ *sont des solutions.*

Pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss, qui permet de résoudre *tous* les systèmes linéaires, se base sur les évidences suivantes :

- Quels que soient A, B, A', B',

$$\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A' = B' \\ A = B \end{cases}$$

- Si $\alpha \neq 0$, $A = B \iff \alpha A = \alpha B$.
- Pour tout réel λ,

$$\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A = B \\ A' + \lambda A = B' + \lambda B \end{cases}$$

On en déduit qu'on peut appliquer les **opérations élémentaires** suivantes au système (S) pour obtenir un système équivalent.

- l'échange de deux lignes : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* α : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

L'algorithme du **pivot de Gauss** consiste à passer d'un système linéaire (S) à un système échelonné équivalent (S_E) en utilisant intelligemment les 3 opérations élémentaires.

Pour cela, on utilise la première ligne (si $a_{11} \neq 0$, sinon on échange) pour se "débarrasser" des x_1 apparaissant dans les lignes en dessous.

Puis on garde le x_2 a la deuxième ligne et on s'en sert pour éliminer tous les x_2 sur les lignes $3, 4, ..., n$. On élimine ainsi de plus en plus de variables.

Exemple 4 (*Pivot de Gauss : exemple 1*)

On considère le système :

$$\begin{cases} \qquad 3y + z + 3t = 1 \\ x + y + z + t = 2 \\ 3x + z = 4 \\ 2x - y + z - t = 3 \end{cases}$$

Résolution :

Exemple 5 (*Pivot de Gauss : exemple 2*)

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 3 \\ x & - & 4y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

Résolution :[1]

Exemple 6 (*Pivot de Gauss : exemple 3*)

Considérons enfin le système à 4 équations et 5 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

Résolution :[2]

1. Indication : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$.
2. Indication : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2, L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$.

Ensemble des solutions d'un système linéaire

Il y a donc trois cas possibles pour l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ d'un système d'équation linéaires (S), qui sont ceux qu'on a obtenu pour les systèmes échelonnés :

1. Soit il n'y a aucune solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$;
2. Soit il y a une unique solution $\boxed{\mathcal{S} = \{X_0\}}$;
3. Soit il y a une infinité de solutions, dépendant du choix de $p - r$ inconnues libres $x_{i_1}, \ldots x_{i_{p-r}}$.
   L'ensemble des solutions est infini, et de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(c_1 + \sum_{j=1}^{p-r} \lambda_{1j} x_{i_j}, \ldots, c_p + \sum_{j=1}^{p-r} \lambda_{pj} x_{i_j} \right), x_{i_1}, \ldots x_{i_{p-r}} \in \mathbb{R} \right\}}$$

Systèmes homogènes

Dans le cas particulier où le second membre est nul ($b_1 = \cdots = b_n = 0$), on dit que le système est **homogène**. Un système homogène admet toujours au moins la solutions nulle $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Il n'y a donc que deux cas possibles :

- soit le rang du système est égal au nombre d'inconnues, et la $(0, \ldots, 0)$ est la seule solution ;
- soit le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues, et il y a alors, en plus de $(0, \ldots, 0)$, une infinité de solutions non nulles.

En particulier, un système homogène qui a plus d'inconnues que d'équations a toujours une infinité de solutions.

Chapitre II - Matrices

Introduction

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on l'appelle l'ensemble des *scalaires*.

Motivation : Remarquez que, pendant la résolution d'un système linéaire, pour savoir quelle opération faire, on ne s'intéresse pas aux inconnues $(x_1, \ldots, x_p)$ mais seulement aux coefficients devant chaque inconnue.

$\rightsquigarrow$ Les matrices vont nous donner une présentation plus efficaces des systèmes, où on ne garde que les coefficients et le second membre.

Des systèmes aux matrices

Définition 1

Etant donné un système linéaire

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

on appelle respectivement ***matrice des coefficients*** *de* (S) *et* ***matrice augmentée*** *les tableaux de nombres*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

On peut alors résoudre le système en appliquant les opérations élémentaires aux lignes de la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \\ x - 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -5y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -6z = 6 \end{cases}$$

On peut faire la remontée avec ces mêmes opérations :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & - & 6z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3, L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{cccccc} x & + & y & & = & 0 \\ & & y & & = & -1 \\ & & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Définitions et règles de calcul

Définition 2

*Une **matrice** A de taille $n \times p$ est un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes :*

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \Big\updownarrow n \text{ lignes} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

i numérote les lignes
j —— colonnes

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tous i, j.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Si $n = p$ on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

Définition 4

Deux matrices A et B sont égales si elles ont même taille $n \times p$ et mêmes coefficients :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, p\}, a_{ij} = b_{ij}.$$

Opérations de base

Définition 5

- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Leur* ***somme*** *$C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont λa_{ij}, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.*

Exemple 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}, 4A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Notation 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- *On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.*
- *On note $-A$ la matrice $(-1) \cdot A$ et on l'appelle l'opposé de A.*
- *On note $A - B = A + (-B)$.*

Proposition 8 (*Propriétés peu surprenantes*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

1. Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
2. Commutativité : $A + B = B + A$;
3. $A + 0_{n,p} = A$, $A + (-A) = 0_{n,p}$;
4. Distributivité : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Produit matriciel

L'opération de produit matriciel est un peu plus complexe : elle ne se borne pas à multiplier les coefficients entre eux.

On verra toutefois que c'est en faisant comme cela qu'on peut appliquer les matrices à un grand nombre de problèmes.

Etape 1 : Produit ligne-colonne

Soit $A = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit le produit de A par B par

$$AB = (a_1 b_1 + \ldots + a_p b_p) = (\sum_{k=1}^{p} a_k b_k) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}.$$

Exemple 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

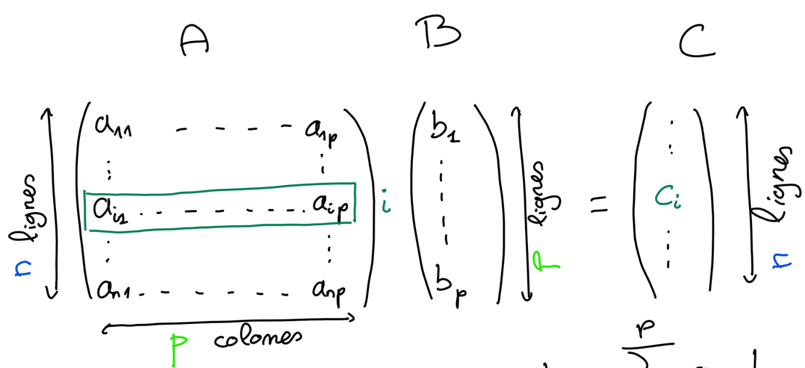
alors $AB = \boxed{\qquad\qquad}$, *mais AC n'est pas défini.*

$\rightsquigarrow$ Une équation linéaire est le produit d'une matrice-ligne de coefficients par une matrice-colonne d'inconnues :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots + a_p x_p = b \iff \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = b$$

Etape 2 : Produit matrice-colonne

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est la matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont le coefficient sur la i-ème ligne est le produit de la i-ième ligne de A par B :



$$C_i = a_{i1} b_1 + \ldots + a_{ip} b_p = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_k$$

Exemple 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}), \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

nous donne

$$AB = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

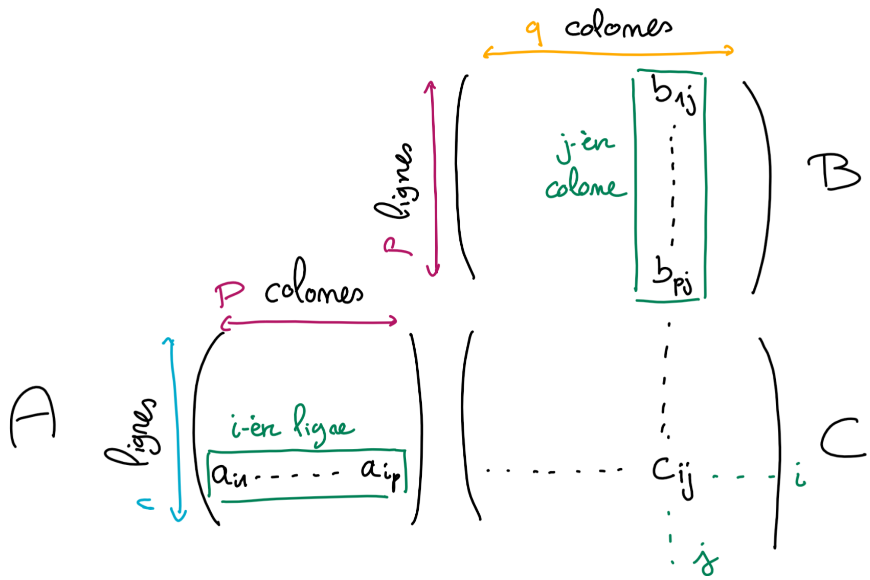
⇝ Un système linéaire est donc représenté par le produit de la matrice des coefficients par la matrice-colonne des inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Produit matrice-matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Le produit $C = AB$ est la matrice de taille $n \times q$ telle que C_{ij} est le produit de la i-ième ligne de A avec la j-ième colonne de B :



Autrement dit, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q$

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.} \tag{1}$$

Exemple 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Observation : *En revanche, le produit BA n'est pas défini.*

Produit matriciel et opérations sur les lignes

⇝ Les opérations sur les lignes d'un système sont représentées par des produits matriciels de la matrice des coefficients avec certaines matrices, qu'on appelle les **matrices élémentaires**.

Echange de lignes : Considérons la matrice $E_{12} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, si on considère par exemple une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait... Qu'est-ce que ça donne, AE_{12} ?

Multiplication d'une ligne par $\alpha \neq 0$: Considérons la matrice $D_2(\alpha) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$D_2(\alpha)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 & \alpha b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait... Qu'est-ce que ça donne, $AD_2(\alpha)$?

Ajout à une ligne de λ fois une autre : On définit $T_{34}(\lambda)$:

$$T_{34}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on a

$$T_{34}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 + \lambda d_1 & c_2 + \lambda d_2 & c_3 + \lambda d_3 & c_4 + \lambda d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Tiens, au fait...

$\rightsquigarrow$ Résoudre un système revient à multiplier la matrice des coefficients par des matrices élémentaires, jusqu'à obtenir une matrice **échelonnée réduite** :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \dots & & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pièges du produit matriciel

⚠ En général, le produit de matrices n'est pas commutatif :

- Il se peut que AB soit défini mais pas BA.
- Il se peut que AB et BA n'aient pas la même taille.

  Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

  $$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} \text{ est de taille } \boxed{}, BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} \text{ est de taille } \boxed{}$$

- Il se peut que AB et BA aient la même taille mais $AB \neq BA$:

  Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, alors

  $$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

⚠ On peut avoir $A \neq 0_{n,p}$, $B \neq 0_{p,q}$ mais $AB = 0_{nq}$:

Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

⚠ On peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$:

Contre-exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Proposition 12 (*Ce qui se passe bien*)

- *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $0_{qn} \cdot A = 0_{qp}$, $A \cdot 0_{pq} = 0_{nq}$.*
- Associativité : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{(AB)C = A(BC)}$.
- Distributivité 1 : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{A(B+C) = AB + AC}$.
- Distributivité 2 : *Soient $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors* $\boxed{(B+C)A = BA + CA}$.

La matrice identité

Définition 13

On appelle ***matrice identité de taille*** n, *notée* I_n, *la matrice carrée*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Ses coefficients sont notés δ_{ij} *et sont donc donnés par :*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* $I_n A = A$ *et* $A I_p = A$.

Preuve :[1]

Puissances d'une matrice carrée

Définition 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On définit les puissances successives de* A *par*

$$A^0 = I_n, \ A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

1. *Indication :* Puisqu'on a la formule de δ_{ij}, on peut utiliser la formule du coefficient i, j du produit matriciel : c'est l'équation (1)

Exemple 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$A^2 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^k = 0$ *pour tout* $k \geq 2$.

Remarque 17

Comme le montre l'exemple précédent, on peut avoir $A^p = 0$ *mais* $A \neq 0$.

On dit dans ce cas que A *est* ***nilpotente***.

Formule du binôme

Proposition 18

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AB = BA$. *Alors*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Remarque 19

⚠ *Cette formule n'est pas vraie si* $AB \neq BA$ *:*

Contre-exemple : *Soient* $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors*

$$(A+B)^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{A+B} \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{A+B} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{A^2} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{AB} + \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{B^2} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice carrée

Définition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est ***inversible*** *s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On dit que B est un* ***inverse*** *de A.*

Proposition 21

Si A est inversible, son inverse est unique. On le note A^{-1}.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Supposons qu'il existe deux matrices B et C telles que

$$AB = AC = I_n, \quad BA = CA = I_n$$

Montrons que $B = C$. Or, on a

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

ce qu'il fallait trouver. □

Exemple 22

1. *I_n est inversible, d'inverse I_n.*
2. *$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Remarque 23

Toutes les matrices ne sont pas inversibles :
Déjà, la matrice nulle ne l'est pas puisque pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $0 \cdot B = 0 \neq I_n$.

Il existe des matrices ***non nulles*** *qui ne sont néanmoins pas inversibles.*
Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Si elle l'était, il existerait $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} \qquad = 1 \\ \qquad = 0 \\ \qquad = 0 \\ \qquad = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{impossible}$$

De plus si A était inversible, on aurait, pour tous $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$AB = AC \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2} B = \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2} C \Rightarrow B = C$$

et on a vu plus haut que ce n'était pas le cas.

Propriétés de l'inverse

Proposition 24

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible, alors* A^{-1} *est aussi inversible et* $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.
2. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles, alors* AB *est inversible et* $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.
3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible, alors pour tout* $p \geq 0$, A^p *est inversible et* $\boxed{(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p}$.
4. *Soient* $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors*
   - *Soit* $C_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible,* $C_1A = C_1B \Rightarrow A = B$.
   - *Soit* $C_2 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *inversible,* $AC_2 = BC_2 \Rightarrow A = B$.

Preuve :

Calcul d'inverse

Proposition 25

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. *Alors, si* $ad - bc \neq 0$, A *est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Preuve : On calcule :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$
$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

□

Cas général : méthode de Gauss

Soit A une matrice carrée inversible. On va calculer son inverse comme suit :

- On écrit la matrice identité I_n à droite de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

- On applique des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice augmentée jusqu'à obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

- On a alors $B = A^{-1}$

Les opérations élémentaires sont les mêmes que pour les systèmes linéaires :

- Echange de lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
- Pour $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

$\rightsquigarrow$ On les applique de façon à se ramener à une matrice triangulaire dans la moitié gauche de la matrice augmentée ($\iff$ échelonnage de systèmes linéaires), puis pour "remonter".

Remarque 26

En fait, cela revient à multiplier A par des matrices élémentaires (celles vues lorsqu'on a fait le lien entre produit matrice-matrice et résolution de système), jusqu'à ce qu'on ait un truc du genre

$$T_{12}(-2)D_2(-\pi)T_{23}(5)T_{13}(-1)D_3(2)T_{32}(37)T_{31}(1)T_{21}(-4)A = I_n$$

et alors on a

$$T_{12}(-2)D_2(-\pi)T_{23}(5)T_{13}(-1)D_3(2)T_{32}(37)T_{31}(1)T_{21}(-4)I_n = A^{-1}.$$

Exemple 27

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculons A^{-1} par cette méthode :*

.

Application à la résolution de systèmes

Un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

peut se réécrire sous la forme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si $n = p$ et si A est inversible, alors ceci équivaut à $X = A^{-1}B$: il y a alors une unique solution au système.

Vocabulaire

Définition 28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *On dit que A est **triangulaire supérieure** si tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls : $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$*
- *On dit que A est **triangulaire inférieure** si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls : $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$*
- *On dit que A est **diagonale** si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Triangulaire sup}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Triangulaire inf}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonale}}$$

Définition 29

*Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice de taille $p \times n$ dont le (i,j)-ième coefficient est a_{ji}. Ainsi,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{n-1,p} & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 30

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Proposition 31

1. *${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$*
2. *${}^t({}^tA) = A$*
3. *${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ (vérifiez que les tailles marchent bien !)*
4. *Si A est inversible, ${}^tA$ aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

Preuve :[2]

Définition 32

- *Une matrice A est dite* ***symétrique*** *si ${}^tA = A$.*
- *Une matrice A est dite* ***antisymétrique*** *si ${}^tA = -A$*

Exemple 33

$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$ *est symétrique,* $\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$ *est antisymétrique.*

Définition 34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La ***trace*** *de A est la somme des coefficients diagonaux de A*

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}$$

Exemple 35

$$Tr\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -9 & 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

2. *Indication :* Pour 1., d'après la définition 5 quels sont les coefficients de ${}^tA + {}^tB$? de $\lambda {}^tA$? Pour 3., utiliser la formule qui donne les coefficients de ${}^tA$ et la formule du produit matriciel (1). Pour 4., en utilisant (3.), calculer ${}^tA^t(A^{-1})$ et ${}^t(A^{-1})^tA$.

Proposition 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a :*

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$, $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
2. $Tr({}^t A) = Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

Preuve : [3]

Petit exercice : Calculer la transposée et la trace des matrices croisées dans ce chapitre (quand elles existent !)

3. *Indication :* Pour 3., utiliser la formule (1) qui donne $(AB)_{ij}$, pour obtenir les $(AB)_{ii}$.

Chapitre III - Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Motivation

Sur des objets mathématiques très différents, on peut effectuer des opérations similaires :

1. Polynômes :

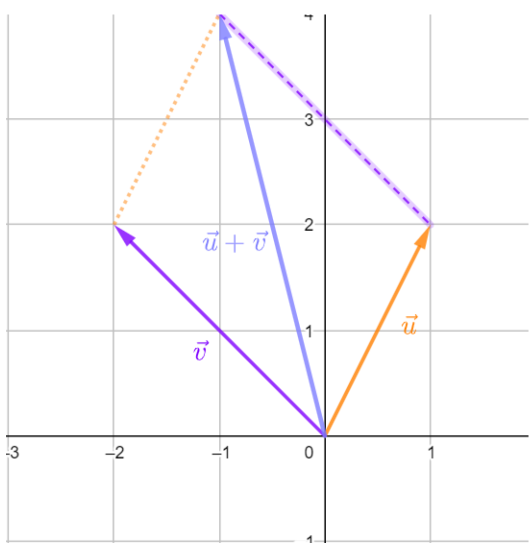
On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
$\triangleright$ On peut sommer deux polynômes de degré 3 :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$
$$\rightsquigarrow P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3$$

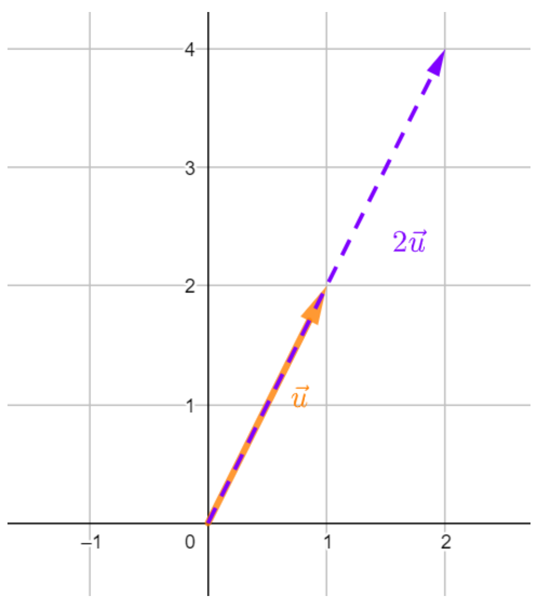
$\triangleright$ On peut multiplier un polynôme de degré 3 par un réel λ :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\rightsquigarrow \lambda P = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \lambda a_2X^2 + \lambda a_3X^3$$

2. Vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$:



On peut additionner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



On peut multiplier un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire λ.

3. Matrices de taille $n \times p$: Par exemple, dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$

- On peut sommer deux matrices 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \ A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

- On peut multiplier une matrice 3×2 par un complexe λ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C} \ \rightsquigarrow \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{pmatrix}$$

Mais ce n'est pas tout ! On peut aussi faire ce type d'opérations sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (un ensemble qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) ou $I \to \mathbb{R}$, ou $I \to \mathbb{R}^2$ [1], les suites de réels (qui forment l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)...

Propriétés communes à toutes ces opérations

Pour chacun de ces ensembles E,

(A1) (Associativité) $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$;

(A2) (Element neutre) Il existe un élément $0_E \in E$ tel que

$$\forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u;$$

(A3) (Opposé) Chaque élément $u \in E$ a un *opposé* :

$$\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = 0_E;$$

(A4) (Commutativité) $\forall u, v \in E, u + v = v + u$.

(M1) Pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$;

(M2) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu \cdot u)$

(M3) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in E$, $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;

(M4) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tous $u, v \in E$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

$\rightsquigarrow$ Les ensembles E sont très différents, mais les *opérations* $u + v$ et $\lambda \cdot u$ ont des propriétés similaires.

1. Plus généralement, si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels et $A \subset E_1$ n'importe quel sous-ensemble, alors l'ensemble des fonctions $A \to E_2$ est un espace vectoriel

Espaces vectoriels : définitions

> La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux. On n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.
>
> *Henri Poincaré*
> *Science et méthode*

Définition 1

*Un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble $E \neq \varnothing$ muni de deux opérations*

- *Une addition interne $(u,v) \in E \times E \mapsto u+v \in E$ qui vérifie les propriétés (A1), (A2), (A3), (A4) ;*
- *Une multiplication externe $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda u \in E$ qui vérifie (M1), (M2), (M3), (M4)*

*Les élements de E sont appelés les **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.*
*L'élément 0_E est appelé le **vecteur nul** et l'opposé d'un vecteur $u \in E$ est noté $-u$.*

Exemples fondamentaux

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

   - L'addition sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par

   $$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$$

   - La multiplication externe est donnée par

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

   - Le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$.
   - L'opposé d'un couple (x,y) est $(-x,-y)$.

   $\rightsquigarrow$ On vérifie que ces deux opérations vérifient (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4).

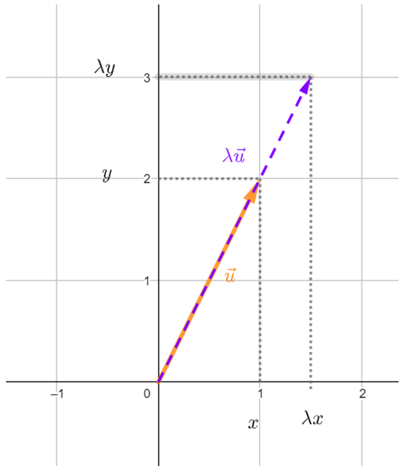
2. De même $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n), x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1,\dots,n\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

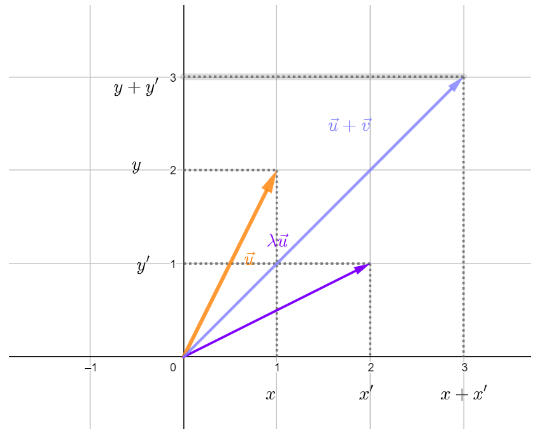
   - L'addition sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par

   $$(x_1,\dots,x_n)+(x'_1,\dots,x'_n) = (x_1+x'_1,\dots,x_n+x'_n)$$

   - La multiplication externe est donnée par

   $$\lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$





- Le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^n} = (0,\dots,0)$.
- L'opposé de $(x_1,\dots,x_n)$ est $(-x_1,\dots,-x_n)$.

$\rightsquigarrow$ On vérifie que ces deux opérations vérifient (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4).

3. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : l'addition et la multiplication par un scalaire $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur ont été décrites au chapitre 2, et on a aussi introduit la matrice nulle $0_{n,p}$ et l'opposé $-A$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

⚠ L'ensemble de toutes les matrices n'est pas un espace vectoriel : on ne peut pas sommer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 158 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 9 & 26 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. L'ensemble $\mathbb{K}_d[X]$ des polynômes de degré $\leq d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

- L'addition sur $\mathbb{K}_d[X]$ est donnée par

$$\sum_{k=0}^{d} a_k X^k + \sum_{k=0}^{d} b_k X^k = \sum_{k=0}^{d} (a_k + b_k) X^k$$

- La multiplication externe est donnée par

$$\lambda \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} (\lambda a_k) X^k$$

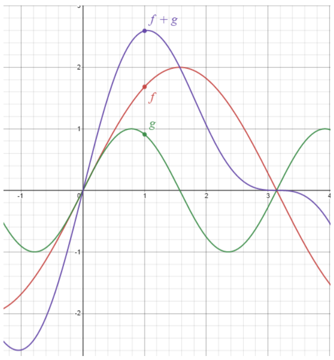
- Le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}_d[X]} = 0 + 0X + \ldots + 0X^d$.
  ⚠ Ne pas confondre le réel 0 et le polynôme nul, qui est un polyôme !
- L'opposé de $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$ est $-P = \sum_{k=0}^{d} (-a_k) X^k = -a_0 - a_1 X - \ldots - a_d X^d$.

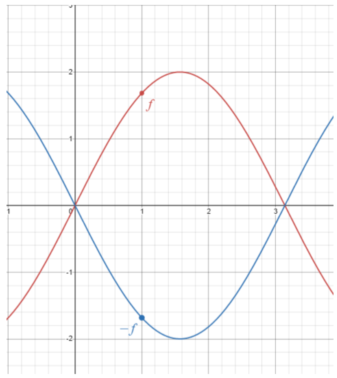
5. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

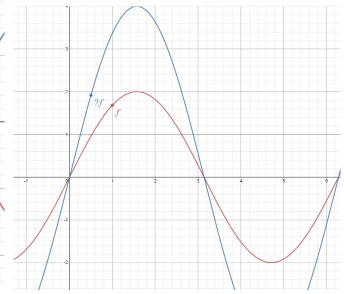
- L'addition sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est donnée, $\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$f + g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$$

- La multiplication externe est donnée $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\lambda f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$
- Le vecteur nul est la fonction constante nulle $0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}} : x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$.
⚠ Ne pas confondre le réel 0 et la fonction nulle , qui est, eh bien, une fonction !







Premières propriétés

Proposition 2 (*Propriétés de base*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a

1. $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall u \in E, (-1) \cdot u = -u$.
4. $\lambda u = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$

Preuve :

Sous-espaces vectoriels

Question : Quels sous-ensembles de E sont, eux aussi, des espaces vectoriels ?

Définition 3

*Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit que $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** de E si*

1. $F \neq \varnothing$, *2.*$\forall u, v \in F,\ u + v \in F$, *3.* $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u \in F$.

Ainsi les opérations sur E se restreignent à F :

$$\begin{aligned} F \times F &\to F \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{K} \times F &\to F \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow F$, avec ces deux opérations, est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $0_E \in F$.

Preuve :

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Alors F est un sous-espace-vectoriel ssi

(a). $0_E \in F$ *(b).* $\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u + \lambda v \in F$

Preuve :[2]

2. *Indication :* On le fait par double implication.

Exemple 6

1. $\{0_E\}$ *est un s.e.v. de* E.

   ⚠ *Ne pas confondre :* $\{0_E\} \neq \varnothing$ *!*

2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x+3y=0\}$ *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$*. En effet,*

   - $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ *vérifie* $2*0+3*0=0$ *donc* $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.
   - *Soient* $u_1 = (x_1,y_1), u_2 = (x_2,y_2) \in F, \lambda \in \mathbb{K}$*. Alors* $u_1 + \lambda u_2 = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$ *vérifie*

   $$2(x_1+\lambda x_2) + 3(y_1+\lambda y_2) = \underbrace{(2x_1+3y_1)}_{=0 \text{ car } u_1 \in F} + \lambda \underbrace{(2x_2+3y_2)}_{=0 \text{ car } u_2 \in F} = 0$$

   donc $u_1 + \lambda u_2 \in F$.

   $\rightsquigarrow$ F *est un sous-espace vectoriel.*

3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*. Alors l'ensemble des solutions du système homogène*

   $$H = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

   est un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$*. En effet :*

   - $0_{\mathbb{R}^p}$ *vérifie* $A0_{\mathbb{R}^p} = 0_{\mathbb{R}^n}$ *donc* $0_{\mathbb{R}^p} \in H$.
   - *Soient* $X, X' \in H$ *et* $\lambda \in H$*. Alors*

   $$A(X+\lambda X') = AX + A(\lambda X') = AX + \lambda AX' = 0_{\mathbb{R}^n} + \lambda 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n},$$

   donc $X + \lambda X' \in H$.

   $\rightsquigarrow$ H *sous-espace vectoriel.*

Exemple 7 (*Contre-exemples*)

1. $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=3\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *puisque* $0_{\mathbb{R}^3} \notin P$.

   Remarque : P *ne vérifie pas non plus l'autre propriété : prenons* $u = (1,1,1), v = (0,0,3)$ *et* $\lambda = 2$.

   $\rightsquigarrow$ $u \in F$: *Vrai* □ *Faux* □ ; $v \in F$: *Vrai* □ *Faux* □ ; $u + 2v \in F$: *Vrai* □ *Faux* □.

2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ *n'est pas un s.e.v. de* $\mathbb{R}^2$*. En effet, pour* $u = (-1,1), \lambda = -1$ *:*

   $u \in A$: *Vrai* □ *Faux* □ ; $\lambda u \in A$: *Vrai* □ *Faux* □.

Opérations ensemblistes et s.e.v.

Proposition 8

Le complémentaire d'un s.e.v. n'est jamais un s.e.v.

Preuve :[3]

Proposition 9

Soient F, G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

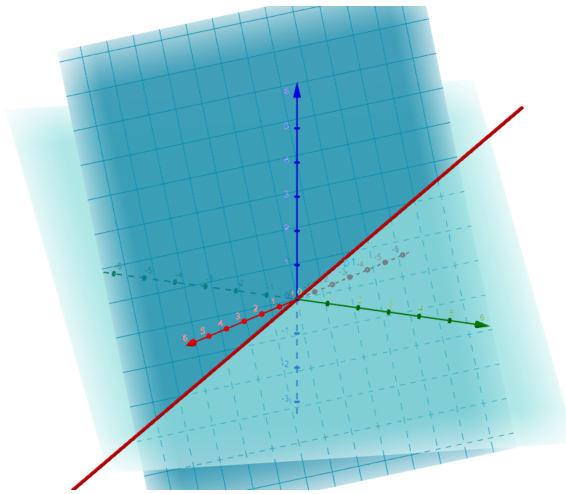
Preuve :

3. *Indication :* Quel élement doit contenir tout s.e.v. qui se respecte ?

Exemple 10

Considérons, dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y+z=0 \text{ et } x+y+2z=0\} \\ &= \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y+z=0\}}_{P_1} \cap \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z=0\}}_{P_2} \end{aligned}$$



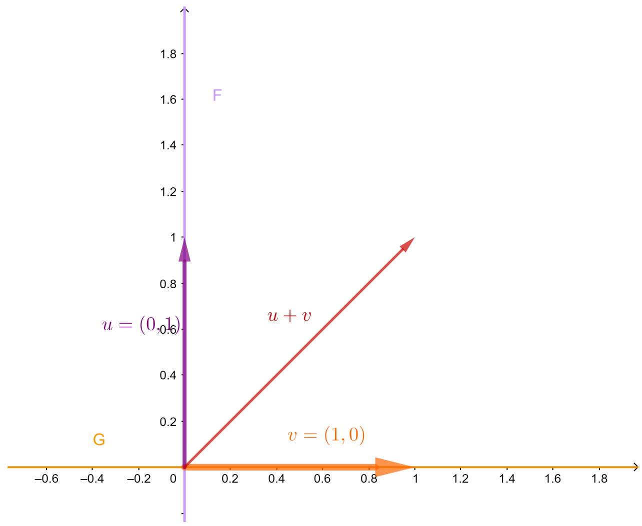
Alors P_1 *et* P_2 *sont des s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$\rightsquigarrow$ *donc* D *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}^3$.

⚠ En revanche, l'union de 2 s.e.v n'est généralement pas un s.e.v.

Exemple 11 (*Contre-exemple*)

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$$



Prenons $u = (0,1), v = (1,0)$*, alors*

$u \in F \cup G$ *: Vrai* □ *Faux* □ *;* $v \in F \cup G$ *: Vrai* □ *Faux* □ *;* $u + v \in F \cup G$ *: Vrai* □ *Faux* □.

Somme de s.e.v.

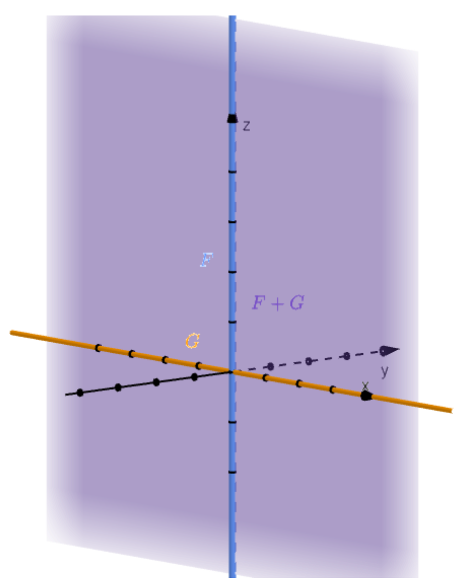
Définition 12

Soient F, G *deux s.e.v d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. On appelle* **somme** *de* F *et* G *le sous-ensemble*

$$F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\} \subset E.$$

Exemple 13

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0\}$,
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = z = 0\}$.
$\rightsquigarrow$ *Montrer que* $F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$.



Proposition 14

1. *$F+G$ est un s.e.v. de E.*
2. *$F+G$ est le plus petit s.e.v. de E qui contient $F \cup G$.*

Preuve :

Somme directe

Définition 15

Soient F, G deux s.e.v. de E. On dit que F et G sont ***supplémentaires****, ou* ***en somme directe****, dans E, si*

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F + G = E$.

On note alors $E = F \oplus G$.

Proposition 16

Soient F, G deux s.e.v. de E, alors

$$E = F \oplus G \iff \forall w \in E,\ \text{il existe un unique couple } (u,v) \in F \times G$$
$$\text{tel que } w = u + v.$$

Preuve :

Remarque 17

Plus généralement, si $F_1, \dots, F_k$ sont des s.e.v. de E, on dit que E ***est somme directe de*** *$F_1, \dots, F_k$ si pour tout vecteur $w \in E$, il existe un unique k-uplet $(v_1, \dots, v_k) \in F_1 \times ... \times F_k$ tel que $w = v_1 + \dots + v_k$.*

Exemple 18

On considère les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}, \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}, \quad G' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$

Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ et $\mathbb{R}^2 = F \oplus G'$. En effet :

.

Sous-espace vectoriel engendré

Définition 19 (*Combinaison linéaire*)

Soient $u_1, \ldots, u_p, v$ des vecteurs de E. On dit que v est ***combinaison linéaire*** *de $u_1, \ldots, u_p$ s'il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que*

$$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$$

Exemple 20

1. *Dans $\mathbb{R}^2$,*
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $(2,3)$ est combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(0,1)$.
2. *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$ est combinaison linéaire de $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$:*
$$P = P_0 + 4P_1 + 3P_2$$

Lien avec les systèmes

Considérons un système linéaire :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 14x & + & 2y & = & b_1 \\ 21x & + & \sqrt{\pi} y & = & b_2 \\ 3x & + & 3y & = & b_3 \end{array} \right.$$

On note $u = (14, 21, 3)$, $v = (2, \sqrt{\pi}, 3)$ et $w = (b_1, b_2, b_3)$. Alors (S) équivaut à $xu + yv = w$.

$\rightsquigarrow$ Le système a des solutions si, et seulement si ; le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Proposition 21

Soit $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$. Alors

- *l'ensemble des combinaisons linéaires des v_i est un s.e.v. de E*
- *c'est le plus petit s.e.v. qui contient $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

On note cet ensemble $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ et on l'appelle ***le sous-espace vectoriel engendré par*** *$v_1, \ldots, v_n$.*

On a donc $u \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Définition 22

Plus généralement, si $A \subset E$ alors

$$\mathrm{Vect}(A) := \{v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists\ a_1, \ldots, a_n \in A, u = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n\}$$

est un s.e.v., et c'est le plus petit s.e.v. qui contient A.

Preuve de la proposition

Notons F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$:

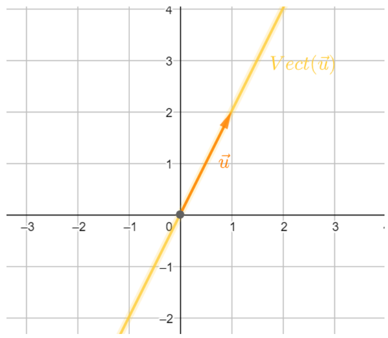
$$F = \{u \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n\}$$

On va montrer que

1. F est un s.e.v.
2. Si $G \subset E$ est un s.e.v. contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors $F \subset G$.

Exemple 23

Dans $E = \mathbb{R}^3$, *prenons* $v_1 = (1, 0, 3), v_2 = (-1, 1, 3)$. *Déterminer* $\mathrm{Vect}(v_1)$ *et* $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.



Chapitre IV - Bases et dimension

Introduction

Dans ce chapitre, comme toujours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des scalaires, et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

A la fin du chapitre III, on a introduit la notion d'**espace vectoriel engendré** $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Si $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, alors tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_p$:

$$\forall u \in E,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}^p \text{ t.q. } u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

$\rightsquigarrow$ Dans ce cas, pour montrer une propriété sur E, il suffit souvent de le faire sur les $(v_1, \dots, v_p)$, qui sont en nombre fini.

Dans ce chapitre, on verra donc :

- Quelles familles de vecteurs engendrent E ?
- Comment choisir la plus petite famille possible ?
- Quel rapport avec la notion de dimension ?

Familles génératrices

Définition 1

*Une famille de vecteurs $\mathcal{F} \subset E$ est dite **génératrice** si $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Autrement dit :*

$$\forall\, v \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists v_1, \dots, v_p \in \mathcal{F}$$
$$t.q.\ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p.$$

*Si E admet une famille génératrice **finie**, on dit que E est **de dimension finie**.*

*Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, on dit que $\{v_1, \dots, v_p\} \subset F$ est une **famille génératrice de** F si $F = \text{Vect}(v_1, ..., v_p)$.*

Méthode : Pour montrer qu'une famille finie $\{v_1, \dots, v_p\}$ est génératrice, il suffit de montrer que $E \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ (l'autre inclusion est *toujours* vraie).

On prend donc $v \in E$ quelconque, et on cherche des scalaires $(\lambda_i)_{i=1\dots p}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$.

Exemple 2

1. $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *est génératrice dans $\mathbb{R}^2$: si $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2).$$

2. $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *est aussi génératrice :*

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + 0v_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3).$$

mais aussi

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0e_1 + (y-2x)e_2 + xv_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3).$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix}27\\31\end{pmatrix} = \boxed{}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \boxed{}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \boxed{}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \boxed{}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

3. $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *est génératrice dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

4. $\left\{f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *n'est pas génératrice dans* $\mathbb{R}^3$*. En effet,* $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ *:*

Entraînement 3

En revanche, $\{f_1, f_2\}$ est une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\}$:

Méthode : Dans $\mathbb{R}^n$, pour montrer l'existence (ou la non-existence !) des scalaires (λ_i), on se ramène à un système d'équations linéaires.

Moralité : On apprend de ces exemples :

- Qu'un même espace vectoriel peut avoir plusieurs familles génératrices différentes.
- Que **toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice** : on peut toujours ajouter des vecteurs avec un coefficient 0.
- Que pour une même famille génératrice $(v_1, \ldots, v_p)$, un vecteur donné peut avoir plusieurs décompositions en combinaison linéaires des (v_i).

Questions :

- Comment repérer les vecteurs en trop ?
- Peut-on choisir la famille génératrice de façon à avoir une unique décomposition pour chaque vecteur ?

Proposition 4

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice telle que v_p soit combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{p-1}$.

Alors $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ est encore génératrice.

Preuve :

Exemple 5

Reprenons la famille génératrice $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Alors on a d'une part $v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \boxed{}$, *donc* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Mais aussi $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \boxed{}$ *donc* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, v_3) = \mathrm{Vect}(e_2, v_3)$.

On sait maintenant enlever les vecteurs inutiles. Mais comment savoir quand s'arrêter ?

$\rightarrow$ Y a-t-il une condition simple qui garantisse qu'aucun v_i n'est combinaison linéaire des autres ?

On va voir que c'est la notion de **famille libre** qui répond à cette question.

Familles libres

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que, si un des vecteurs (disons v_{i_0}) est combinaison linéaire des autres, alors on a

$$v_{i_0} = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + \lambda_p v_p$$

donc

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} - v_{i_0} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E$$

$\rightsquigarrow$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \ldots, \lambda_p)$ est une solution non nulle du système homogène

$$x_1 v_1 + ... + x_{i_0-1} v_{i_0-1} + x_{i_0} v_{i_0} + x_{i_0+1} v_{i_0+1} + \ldots + x_p v_p = 0_E$$

$\rightsquigarrow$ S'il y a des vecteurs "en trop" alors ce système homogène a des solutions non nulles.

$\rightarrow$ On va voir que la réciproque marche aussi.

Définition 6

Une famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset E$ *est dite* ***libre*** *si*

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E) \iff (\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0).$$

Une famille qui n'est pas libre est dite ***liée****. Donc,* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *est liée ssi il existe* $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ non tous *nuls tels que* $\sum \lambda_i v_i = 0_E$.

⚠ Ne pas confondre "non tous nuls" et "tous non nuls" : Si par exemple $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 137.9$ alors les λ_i sont *non nous nuls*, mais il ne sont pas *tous non nuls*.

Méthode : Pour savoir si une famille est libre, on suppose que

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E$$

En général, en utilisant les coordonnées des v_i, cela signifie que les scalaires λ_i sont solutions d'un système linéaire homogène.

$\rightsquigarrow$ Il s'agit alors de vérifier si $(0, \ldots, 0)$ est, ou non, la seule solution de ce système.

- Si oui, la famille est libre ;
- Si non, alors le système a une infinité de solutions, et donc pour l'une de ces solutions, au moins l'un des λ_i est différent de 0, autrmeent dit les λ_i sont non tous nuls. Donc la famille est liée.

Exemple 7

1. $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *est libre dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

2. $\{P_1(X) = X^2 - 3, P_2(X) = X + 2\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$ *: Soient* λ_1, λ_2 *tels que* $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$*, i.e.*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

⚠ *Ne pas confondre le* polynôme *nul* $0_{\mathbb{R}_2[X]}$ *et le* réel *0 ! Ici, il ne s'agit pas de déterminer les racines de* $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X - 3\lambda_1 + 2\lambda_2$*.*

3. $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ *n'est pas libre :*

Proposition 8

1. *Soit* $v \in E$ *quelconque. Alors la famille* $\{v\}$ *est libre ssi* $v \neq 0_E$*.*
2. *Soient* $u, v \in E$*. Alors la famille* $\{(u, v)\}$ *est liée ssi* u *et* v *sont colinéaires.*
3. *Toute famille qui contient* 0_E *est liée.*

Preuve :

Proposition 9

Soit $p \geq 2$. Une famille $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ est liée ssi au moins l'un des v_i est combinaison linéaire des autres.

Preuve :

Remarque 10

Intuitivement, donc, si on part d'une famille génératrice, on peut enlever des vecteurs jusqu'à tomber sur une famille libre. A ce moment-là, la contraposée de la proposition précédente dit qu'aucun des vecteurs restants n'est combinaison linéaire des autres.

Bases

Définition 11

Une famille $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base de** *E si elle est à la fois libre et génératrice.*

Si $F \subset E$ est un s.e.v., une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est une **base de** *F si elle est libre et si $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.*

Proposition 12

Soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Alors, pour tout vecteur $v \in E$, il existe un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

On dit que le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les **coordonnées** *de v dans la base $\mathscr{B}$.*

Remarque 13

Pour que les coordonnées soient uniques, *on choisit un ordre sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. Ainsi, pour $n = 2$, $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_2, v_1\}$ sont la même famille, mais (v_1, v_2) et (v_2, v_1) sont des bases différentes.*

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de $(3,1)$ dans la base $((1,0),(0,1))$ sont $(3,1)$, et les coordonnées de $(3,1)$ dans la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$ sont $(1,3)$

Preuve de la proposition :

Exemple 14

1. $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de $\mathbb{R}^2$. On a déjà vu que c'est une famille génératrice ; montrons qu'elle est libre. Supposons que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, autrement dit*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

$\rightsquigarrow$ Dans cette base, les coordonnées de (x,y) sont... (x,y).

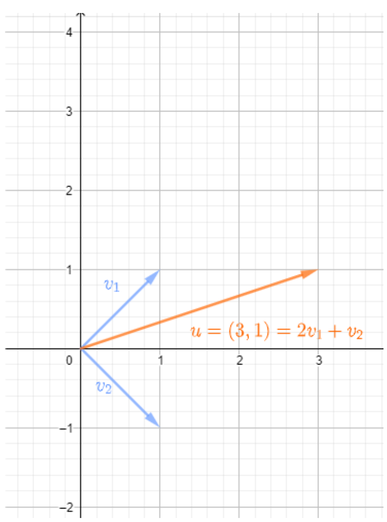
$\rightsquigarrow$ *Comme cette base nous donne des coordonnées particulièrement simples, c'est celle qu'on va utiliser par défaut : on l'appelle la* **base canonique** *de* $\mathbb{R}^2$.

2. *De même,* $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et dans cette base, les coordonnées de* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *sont* (x, y, z) *:*

3. *Plus généralement,* $\left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$*, appelée* **base canonique** *de* $\mathbb{K}^n$.

4. *On a vu que* $\left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille libre et génératrice.*

   $\rightsquigarrow$ (v_1, v_2) *est une base de* $\mathbb{R}^2$*. Soit* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$*, cherchons les coordonnées de* u *dans la base* (v_1, v_2) *:*



   Entraînement : *Quelles sont les coordonnées de* u *dans la base* (v_2, v_1) *?*

5. $(1, X, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Dans cette base, les coordonnées du polynôme* $aX^2 + bX + c$ *sont* (a, b, c) *:*

Plus généralement $(1, X, \dots, X^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$*, qu'on appelle* **base canonique** *de* $\mathbb{K}_n[X]$.

6. *La famille ci-dessous est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *:*

$$\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

7. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$. *La famille* $\mathscr{B} = ((1,1,0),(1,0,1))$ *engendre* F*. Montrons qu'elle est libre :*

Existence de bases

Question : Etant donnée une famille libre ou génératrice, comment en déduire une base de E ?

Proposition 15

Supposons que E *soit de dimension finie, et soit* $\mathscr{G}$ *une famille génératrice finie. Soit* $\mathscr{L}$ *une famille libre. Alors il existe une sous-famille* $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ *telle que* $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ *est une base de* E

Remarque 16

L'idée est donc de "piocher" des vecteurs dans $\mathscr{G}$ *et de les ajouter à* $\mathscr{L}$*, en s'assurant à chaque étape que la nouvelle famille est toujours libre (qu'on n'a pas introduit de vecteur "en trop"). Puisque* $\mathscr{G}$ *est génératrice et finie, au bout d'un moment, on aura pioché assez de vecteurs pour engendrer tous les autres.*

Corollaire 17

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Preuve de la proposition

On en déduit :

Théorème 18 (*Théorème de la base incomplète*)

Supposons que E est de dimension finie. Alors

- *Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*
- *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*

Preuve :

- Le premier point est une reformulation du théorème précédent.
- Pour le second point : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice. Alors il existe $g \in \mathscr{G}$ tel que $g \neq 0_E$. On applique alors le théorème précédent à la famille libre $\mathscr{L} = \{g\}$: cela donne une famille $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{F} \cup \{g\}$ soit une base de E. $\square$

Exemple 19

Considérons $v = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Comme* $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, *la famille* $\mathscr{L} = \{v\}$ *est libre. Complétons-la en une base en utilisant la famille génératrice*

$$\mathscr{G} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Dimension d'un espace vectoriel

Il semble donc que les familles génératrices soient parfois trop "grosses" pour être des bases, et les familles libres trop "petites".

La proposition suivante exprime cette idée en terme de nombre d'éléments :

Proposition 20

Soient $\mathscr{L}$ *une famille libre et* $\mathscr{G}$ *une famille génératrice. Alors*

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G}).$$

Preuve :

Ce théorème nous permet de montrer :

Théorème 21

Supposons que E admette une base à n éléments. Alors

- *Toute famille libre de E a au plus n éléments ;*
- *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments ;*
- *Toute base de E a exactement n éléments.*

*On appelle **dimension** de E le nombre d'éléments des bases de E.*

Preuve : Soit $\mathscr{B}$ une base de E à n éléments.

- Si $\mathscr{L}$ est une famille libre, puisque $\mathscr{B}$ est génératrice, on a par le théorème précédent $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq n$.
- Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice, puisque $\mathscr{B}$ est libre, on a par le théorème précédent $\mathrm{Card}(\mathscr{G}) \geq n$.
- Si $\mathscr{B}'$ est une base de E, alors elle est libre et génératrice, donc $n \leq \mathrm{Card}(\mathscr{B}') \leq n$; autrement dit, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = n$. □

Exemple 22

1. *On a vu que pour tout n,*
$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$.
2. *On a vu que pour tout n, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Donc* $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$.
3. Exercice : *Montrer que pour tous entiers n, p, la famille $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ des matrices dont les coefficients sont*
$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Donc $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np}$.

   Indication : *On a déjà vu la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Donc* $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})) = \boxed{}$.

Inversement, on a :

Proposition 23

Supposons que $\dim E = n$. *Soit* $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ *une famille à* n *éléments. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathscr{F}$ *est une base de* E *;*
2. $\mathscr{F}$ *est une famille libre ;*
3. $\mathscr{F}$ *est une famille génératrice.*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2), 1) $\Rightarrow$ 3) découlent de la définition d'une base.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathscr{F}$ une famille libre à n éléments. Alors, par le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs $\mathscr{F}'$ telle que $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ soit une base de E. Mais alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F} \cup \mathscr{F}') = n = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice à n éléments. ALors, par le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Mais alors $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{B} = \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base. $\square$

Méthode : Pour montrer qu'une famille à n éléments dans un e.v. de dimension n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre <u>ou</u> génératrice. Dans la pratique, il est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre.

Dimension et sous-espaces vectoriels

On l'a vu, si F est un sous-espace-vectoriel de $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est lui-même un espace vectoriel. On peut donc parler

- de famille génératrice de F : si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, alors $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille génératrice de F
- de base de F : si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et si $(u_1, \dots, u_k)$ est libre, alors c'est une base de F
- de la dimension de F : c'est le cardinal de ses bases.

⚠ **Convention bizarre** ⚠ Si $F = \{0_E\}$, F est un s.e.v. mais aucune famille non vide de vecteurs de F n'est libre, donc aucune n'est une base.

$\rightsquigarrow$ On considère donc que $\varnothing$ est une “base” de F.

$\rightsquigarrow$ Si $F = \{0_E\}$, $\dim F = \mathrm{Card}\,\varnothing = 0$.

⚠ $\{0_E\} \neq \varnothing$!

Un résultat peu surprenant :

Proposition 24

Si E *est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel* F *de* E *est aussi de dimension finie. De plus :*

1. $\dim F \leq \dim E$
2. $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $F = E$.

Puisque les sous-espaces vectoriels sont eux-mêmes des espaces vectoriels, on en déduit :

Corollaire 25

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Alors $\dim F \leq \dim G$, et $\dim F = \dim G$ ssi $F = G$.

Méthode : Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est égal à E tout entier, il suffit de montrer que leurs dimensions sont égales.

Preuve de la proposition :

Exemple 26

Considérons $F = \mathrm{Vect}\left((1,2,1),(1,1,0)\right)$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\right\}$. Montrons que $F = G$.

Somme et dimensions

Dans le chapitre précédent, on a introduit la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G, ainsi que la décomposition de E en *somme directe* $F \oplus G$. En termes de dimensions, on a :

Proposition 27

Supposons que E est de dimension finie, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels. Alors

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

En particulier, si $E = F \oplus G$,

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

Corollaire 28

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors tout supplémentaire de F est de dimension $\dim E - \dim F$.

Preuve de la proposition :

Base de $E = F \oplus G$

Si E se décompose de $F \oplus G$, on peut construire des bases de E à partir de celles de F et G :

Proposition 29

Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $E = F \oplus G$
2. *pour toute base* $\mathscr{B}_F$ *de* F *et pour toute base* $\mathscr{B}_G$ *de* G*, alors* $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ *est une base de* E*.*
3. *il existe* $\mathscr{B}_F$ *base de* F *et* $\mathscr{B}_G$ *base de* G *tq* $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ *est une base de* E*.*

Preuve : On montre $\boxed{1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1}$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ On procède comme dans la preuve du théorème précédent, avec cette fois $F \cap G = \{0\}$.
On a montré que si $\mathscr{B}_F = (v_1, \dots, v_q)$ est une base de F et $\mathscr{B}_G = (w_1, \dots, w_r)$ est une base de G alors $(v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r)$ est une base de $F + G = E$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ ...ça, ça va.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Soient $\mathscr{B}_F = (v_1, \dots, v_q)$ une base de F, $\mathscr{B}_G = (w_1, \dots, w_r)$ une base de G. Alors, par hypothèse $(v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r)$ est une base de E. Montrons que $E = F \oplus G$.

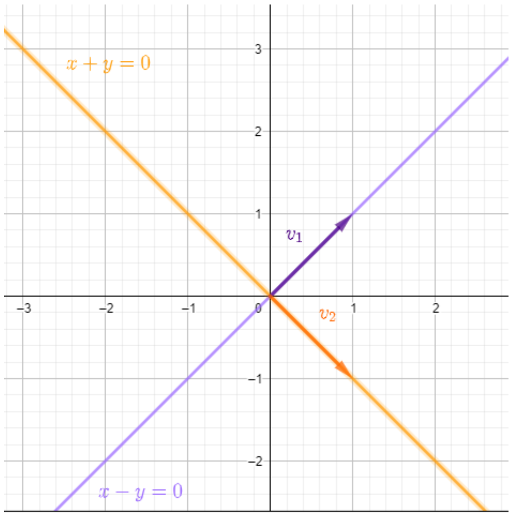
Exemple 30

Montrons que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$*, avec :*

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 : \ a \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 31

Ca marche dans les deux sens !



On a vu que $\left(v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*. On en déduit que*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \mathrm{Vect}((1,1)) \oplus \mathrm{Vect}((-1,1))\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-y=0\} \oplus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}\end{aligned}$$

et on a

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, u = \underbrace{\frac{x+y}{2}v_1}_{\in \mathrm{Vect}((1,1))} + \underbrace{\frac{x-y}{2}v_2}_{\in \mathrm{Vect}((-1,1))}$$

Chapitre V - Applications linéaires

Introduction

Dans ce chapitre (on ne change pas une équipe qui gagne), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est l'ensemble des scalaires, et E, F seront deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Dans les deux précédents chapitres, on a étudié toutes sortes d'ensembles munis d'une structure commune : celle d'espace vectoriel.

Question : Si E, F sont deux e.v., quelles sont les applications $f : E \to F$ qui "préservent" cette structure, autrement dit, envoient une somme de vecteurs de E sur la somme correspondante dans F, et de même avec la multiplication scalaire ?

Dans ce chapitre, on verra donc :

- Qui sont ces applications ?
- A quelle condition sont-elles injectives, surjectives et bijectives ?
- Que font-elles aux s.e.v ? Aux familles libres ou génératrices ?
  Aux bases de E ?

Applications linéaires

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est ***linéaire*** *si :*

1. *Pour tous $(x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;*
2. *Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.

Une application linéaire $E \to E$ est appelée un ***endomorphisme*** *de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endormorphismes E.*

Proposition 2

Si $f : E \to F$ est linéaire, $\boxed{f(0_E) = 0_F}$.

Preuve :

Proposition 3 (*Une caractérisation utile*)

Soit $f : E \to F$ une application.

Alors f est linéaire <u>ssi</u> pour tous $(x, y) \in E^2$, pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{1}$$

Preuve :[1]

Exemple 4

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, *alors* $h_\alpha : x \in E \mapsto \alpha x \in E$ *est linéaire.*

$\rightsquigarrow$ *En effet, pour tous* $(x, y) \in E^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *on a*

Deux cas particulier notables :

- *si* $\alpha = 0$ *on obtient* ***l'application nulle*** $0_{\mathcal{L}(E)} : x \in E \mapsto 0_E$.

  Exercice important : *Plus généralement, l'application* $x \in E \mapsto 0_F \in F$ *est linéaire. On la note* $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

- *si* $\alpha = 1$ *on obtient* ***l'identité*** $\mathrm{Id}_E : x \in E \mapsto x \in E$.

Exemple 5

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, *alors l'application*

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est linéaire : $\Phi_A(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY$.

1. *Indication :* Procéder par double implication ! Cette preuve ressemble à celle de la proposition 5 du chapitre 3, qui dit qu' "un sous-ensemble $F \subset E$ est un s.e.v. ssi $0_E \in F$ et $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$"

Exemple 6

L'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, z + y) \in \mathbb{R}^2$ *est linéaire :*

Exemple 7

L'application dérivation $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$ *:*

Exemple 8

L'application transposée $t : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *est linéaire :*

Exemple 9 (*Projection dans une somme directe*)

Soient E_1, E_2 *deux s.e.v. de* E *tels que* $E = E_1 \oplus E_2$*. Alors les projections*

$$\begin{aligned} p_1 : E = E_1 \oplus E_2 &\to E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto x_1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_2 : E = E_1 \oplus E_2 &\to E_2 \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

sont linéaires.

Exemple-ception : *On a vu que* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,1)) \oplus \mathrm{Vect}((1,-1))$*. Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les applications suivantes sont linéaires

$$p_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right),$$

$$p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

Exemple 10

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathscr{F} = (v_1, ...v_p)$ une famille de vecteurs. L'application $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \in E$ est linéaire.

Exemple-ception : *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, prenons les vecteurs $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X + 1$. L'application*

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \lambda X^2 + \mu(X + 1) \in \mathbb{R}_2[X]$$

est linéaire.

Exemple 11 (***Contre-exemples***)

1. *Soit $x_0 \in E$ un vecteur non nul. La translation $t : x \in E \mapsto x + x_0 \in E$ n'est pas linéaire :*

   Exemple-ception : *$t : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire.*
2. *L'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (xy, y^2 - x) \in \mathbb{R}^2$ n'est pas linéaire :*
3. *L'application $p : x \in \mathbb{R} \mapsto 2^x - 1 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire :*

Composition d'applications linéaires

Proposition 12

Soient E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire.

Preuve :

Exemple 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a vu que $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$ est linéaire. D'après la proposition,

$$\Phi_A \circ \Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto A^2 X \in \mathbb{R}^n$$

est également linéaire.
⚠ *Par contre, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas linéaire (Montrez-le !).*

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 14

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + g : E \to F$ et $\lambda f : E \to F$ sont des applications linéaires.

Preuve :

Proposition 15

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition interne $(f,g) \mapsto f+g$ et de la loi externe $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve : On sait que l'ensemble des fonctions $E \to F$ est un espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v. Or

1. L'application constante égale à 0_F est linéaire ;
2. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$;
3. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est bien un s.e.v de l'espace des fonctions $E \to F$. □

Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Image directe

Proposition 16

Soit $E' \subset E$ un s.e.v. de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $f(E') = \{f(x), x \in E'\}$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

Définition 17

*Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble $f(E)$ est un s.e.v. de F, appellé **image** de f et noté $\mathrm{Im}(f)$.*

Remarque 18

L'application f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exemple 19 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^p \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$ l'application associée. Un vecteur $b = (b_1, \ldots, b_n)$ est dans $\mathrm{Im}(\Phi_A)$ ssi il existe $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\Phi_A(x) = b$, autrement dit

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Autrement dit, $b \in \mathrm{Im}(\Phi_A)$ ssi ce sytème admet des solutions.

Exemple 20

On va déterminer l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + y, y + z) \end{aligned}$$

Image réciproque et noyau

⚠ Une notation confusante ⚠

Soit $f : X \to Y$ une fonction (linéaire ou non) entre deux ensembles quelconques. Soit $B \subset Y$ un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Alors on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensble de X défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$$

$\rightsquigarrow$ Contrairement aux apparences, cela **ne suppose pas que f est bijective, et f^{-1} ici ne désigne pas la bijection réciproque de f !**

Par exemple, si $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, alors f n'est ni injective ni surjective, donc pas bijective, mais on peut néanmoins prendre le sous ensemble $[-1, 4]$ de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et calculer

$$f^{-1}([-1, 4]) = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [-1, 4]\} = [-2, 2]$$

(Vérifiez que cet exemple est clair pour vous !)

Proposition 21

Soit F' un s.e.v. de F et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f^{-1}(F') = \{x \in E, f(x) \in F'\}$ est un s.e.v. de E.

Preuve :

Définition 22

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$ est un s.e.v. de E, appelé **noyau** *de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.*

Proposition 23

f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Preuve : On procède par double implication :

Exemple 24 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^p \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$. Alors $X \in \mathrm{Ker}\,\Phi_A$ ssi X est solution du système

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ *C'est un système* homogène, *il a donc au moins une solution $X = (0,\dots,0)$.*

- *Si c'est la seule, alors $\mathrm{Ker}\,\Phi_A = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et Φ_A est injective.*
- *Sinon, il y a une infinité de solutions, qui (comme on a vu au chapitre 3 !) forment un s.e.v de $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 25

Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$, où $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$:

Isomorphismes

Définition 26

Une application linéaire bijective (c'est-à-dire à la fois injective et surjective) est appelée ***isomorphisme linéaire****.*

Deux e.v. E et F sont ***isomorphes*** *s'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$.*

Remarque 27

Rappelons qu'une application $\phi : X \to Y$ entre deux ensembles est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque (ou inverse) $\phi^{-1} : Y \to X$ telle que $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$ et $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{Id}_X$.

Proposition 28

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme linéaire. Alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.

Preuve :

Exemple 29 (*Exemple important*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, *alors $\Phi_A : X \in \mathbb{R}^n \to AX \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire, d'inverse $(\Phi_A)^{-1} = \Phi_{A^{-1}}$. En effet,*

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ \Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}}(Y) = \Phi_A(A^{-1}Y) = AA^{-1}Y = Y$$
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \Phi_{A^{-1}} \circ \Phi_A(X) = \Phi_{A^{-1}}(AX) = A^{-1}AX = X$$

donc $\Phi_{A^{-1}}$ est bien l'application inverse de Φ_A.

Exemple 30

Considérons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + 3y, x + y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que f est bijective en calculant f^{-1} :

Applications linéaires et familles de vecteurs

Question : L'image d'une famille libre/génératrice par une application linéaire est-elle libre/ génératrice ?

Réponse : En général, non.

Exemple 31 (***Contre-exemple***)

Par exemple, si $f:(x,y)\mapsto(x,0)\in\mathbb{R}^2$ *alors pour*

$$\mathscr{F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ on a } f(\mathscr{F})=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}:$$

$\mathscr{F}$ *est libre, mais* $f(\mathscr{F})$ *est liée.*

$\rightsquigarrow$ *On peut avoir* $\mathscr{F}$ *libre mais* $f(\mathscr{F})$ *liée.*

$\mathscr{F}$ *est génératrice, mais pas* $f(\mathscr{F})$ *:* $(0,1)\notin\mathrm{Vect}(f(\mathscr{F}))$.

$\rightsquigarrow$ *On peut avoir* $\mathscr{F}$ *génératrice mais* $f(\mathscr{F})$ *pas génératrice.*

Question : Est-ce qu'on peut quand même en dire quelque chose ?

Réponse : En utilisant la linéarité de f, on obtient que si $\mathscr{F}=(v_1,\ldots,v_p)$ est une famille de vecteurs de E, alors pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ on a

$$f(\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_p v_p)=\lambda_1 f(v_1)+\ldots+\lambda_p f(v_p)$$

$\rightsquigarrow$ Voyons ce qu'on peut en tirer :

Proposition 32

Soit $\mathscr{F}=\{v_1,\ldots,v_p\}$ *une famille de vecteurs et* $f\in\mathcal{L}(E,F)$*. Alors*

1. $f(\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_p))=\mathrm{Vect}(f(v_1),\ldots,f(v_p))$;
2. *Si* $\mathscr{F}$ *est génératrice, alors* $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(v_1),\ldots,f(v_p))$;
3. *Si* $\mathscr{F}$ *est liée alors* $(f(v_1),\ldots,f(v_p))$ *est liée ;*
4. *Si* $(f(v_1),\ldots,f(v_n))$ *est libre alors* $\mathscr{F}$ *est libre.*

Au risque d'insister...

⚠ L'image d'une famille libre peut être liée.
⚠ L'image d'une famille génératrice de E n'est pas nécessairement génératrice de F.

Exemple 33

Considérons

$$f:(x,y,z)\mapsto(2x+y,y+z) \text{ et } \mathscr{B}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Alors $\{f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)\}=$

est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,f=\mathbb{R}^2$

Remarque : $\mathscr{B}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *mais* $f(\mathscr{B})$ *n'est pas une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 34

Considérons la projection sur $\mathrm{Vect}((1,-1))$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}((1,1))$

$$p_2 : (x,y) \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) \text{ et } \mathscr{B} = \{(1,0),(0,1)\}$$

Alors $\{f(1,0), f(0,1)\} =$

engendre $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(1,-1)$.

Remarque : *A nouveau,* $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice mais* $f(\mathscr{B})$ *n'est ni libre, ni génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Preuve de la proposition :

$\rightsquigarrow$ Si on a plus d'informations sur f, c'est mieux :

Proposition 35

Soit $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si f est injective et $\mathscr{F}$ est libre, alors $f(\mathscr{F})$ est libre.*
2. *Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice, alors $f(\mathscr{F})$ est génératrice.*

On en déduit :

Corollaire 36

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors l'image par f d'une base de E est une base de F.

En particulier, $\dim E = \dim F$.

Preuve de la proposition :

Applications linéaires en dimension finie

Supposons que E est de dimension finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors chaque $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :

$$\forall x \in E,\ \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ t.q. } x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

Mais alors

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n).$$

$\rightsquigarrow$ Si on sait trouver les coordonnées de tout vecteur x dans la base $\mathscr{B}$, et si on connaît $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, on peut en déduire $f(x)$ pour tous les vecteurs $x \in E$.

$\rightsquigarrow$ Inversement, si on choisit l'image d'une base, on peut construire une application linéaire :

Proposition 37

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Alors, pour tout p-uplet $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, ..., p\},\ \ f(e_i) = v_i$$

Preuve : Il y a deux choses à montrer : d'une part qu'il *existe* une telle application linéaire f, et d'autre part que cette application est *unique.*

- **Existence :**

- **Unicité :**

Exemple 38

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_p[X]$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, ...p\},\ \ f(e_i) = (X+3)^i,$$

où $(e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$. f est donnée par

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_p) &= f(x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p) \\ &= x_1 f(e_1) + \ldots x_p f(e_p) \\ &= x_1(X+3) + x_2(X+3)^2 + \ldots + x_p(X+3)^p \end{aligned}$$

On a vu que s'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$, alors $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, la proposition précédente nous permet de montrer :

Corollaire 39

Si $\dim E = \dim F$*, il existe un isomorphisme linéaire* $f : E \to F$.

Preuve : Notons $n = \dim E = \dim F$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

$\rightsquigarrow$ D'après la proposition précédente, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout i.

$\rightsquigarrow$ On va montrer que f est bijective : f sera alors un isomorphisme $E \to F$.

$\triangleright$ **Injectivité de f :** On montre que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\triangleright$ **Surjectivité de f :** On montre que $\mathrm{Im}(f) = F$.

Rang d'une application linéaire

Définition 40

Soient E et F deux e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** *de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension du s.e.v. $\mathrm{Im}(f) \subset F$.*

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)}$$

Exemple 41

1. *Considérons à nouveau*
$$f : \mathbb{R}^3 \in (x, y, z) \mapsto (2x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$$
On a vu que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, *donc* $\mathrm{rg}(f) = \boxed{}$.

2. *Soit* $f : x \in E \mapsto 0_F \in F$ *l'application nulle. Alors* $\mathrm{rg}(f) = \dim(\{0_F\}) = \boxed{}$.

3. *Soit* $p_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) \in \mathbb{R}^2$ *la projection sur* $\mathrm{Vect}((1, 1))$. *Alors* $\mathrm{rg}(f) = \boxed{}$.

Théorème du rang

Théorème 42

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, *alors* $\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$.

Preuve :

Plan de bataille :

Posons $n = \dim E$ et $p = \dim \mathrm{Ker}(f)$. On va montrer que $\mathrm{rg}(f) = n - p$.

Pour cela, on prend une base $\{u_1, \dots, u_p\}$ de $\mathrm{Ker}(f)$. C'est, en particulier, une famille libre de E, donc, par le théorème de la base incomplète, on peut lui adjoindre $n - p$ vecteurs $v_{p+1}, \dots, v_n$ de E tels que $(u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ est une base de E.

On va montrer que $\mathscr{B} = \{f(v_{p+1}), \dots, f(v_n)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

▸ $\mathscr{B}$ **engendre** $\mathrm{Im}(f)$ **:**

▸ $\mathscr{B}$ **est une famille libre :**

Corollaire 43 (*Rang et injectivité/surjectivité*)

1. *f est injective ssi* $\mathrm{rg}(f) = \dim E$
2. *f est surjective ssi* $\mathrm{rg}(f) = \dim F$

Preuve :[2]

Remarque 44

On retrouve donc le fait que si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors on doit avoir $\dim E = \dim F$.

Proposition 45

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E et F sont de dimension finie et que $\boxed{\dim E = \dim F}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
1. f est injective, *2. f est surjective,* *3. f est bijective*

2. Le 1. est une conséquence du théorème du rang ; le 2. vient en fait simplement de la définition du rang et du fait que si $G \subset F$ est un s.e.v de F, alors $G = F$ ssi $\dim G = \dim F$.

Remarque 46

Ceci s'applique en particulier aux endomorphismes $f : E \to E$, du moment que E est de dimension finie.

Preuve de la proposition :

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que f est injective, alors $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(\{0_E\}) = 0$ donc, par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = \dim E = \dim F$$

donc $\mathrm{Im}(f) = F$, et par conséquent f est surjective.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supposons que f est surjective. Alors $\mathrm{rg}(f) = \dim F = \dim E$, donc par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et f est aussi injective. Elle est donc bijective.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Vrai par définition de la bijectivité. □

Exemple 47

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

⇝ *Pour montrer que f est un isomorphisme, il suffit de montrer que f est injective, et pour ça, il suffit de montrer que* $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$. *Allons-y :*

⚠ Cette proposition n'est pas vraie en dimension infinie !

Exemple 48 (*Contre-exemple*)

Considérons $D : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$. *Alors*

- $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}[X]$ *donc D est surjective*
- $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(1) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ *donc D n'est pas injective.*

Chapitre VI - Représentation matricielle des applications linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, devinez quoi, on va noter $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des scalaires, et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie** sur $\mathbb{K}$. On notera $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Dans les précédents chapitres, on a vu que dans un e.v. E de dimension finie n, il existe toutes des bases, qui sont toutes de cardinal n.

Si on choisit une base $\mathscr{B}$ de E, chaque vecteur de E peut être représenté par un unique n-uplet de coordonnées scalaires : les coordonnées du vecteur *dans la base* $\mathscr{B}$.

Dans ce chapitre, à l'aide de cette idée, on verra :

- Comment représenter un vecteur de E par une matrice-colonne ;
- Comment représenter une application linéaire $E \to F$ par une matrice ;
- En quoi ça aide ?

Des bases aux matrices

Vecteurs et matrices-colonnes : On fixe pour la suite :

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p) \text{ une base de } E,\ \mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n) \text{ une base de } F$$

$\rightsquigarrow$ Pour chaque $x \in E$, il existe donc un unique p-uplet $(x_1 \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$. On peut donc lui associer un vecteur-colonne, que l'on notera

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ De même, pour $y \in F$, il existe un unique $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n$. On associe à y le vecteur-colonne

$$[y]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Exemple 1

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.
Alors, le vecteur $u = (1, 2, \sqrt{\pi}) \in \mathbb{R}^3$ se décompose dans la base $\mathscr{B}_0$ en

$$u = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + \sqrt{\pi} \cdot e_3$$

donc on lui associe le vecteur colonne

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

et plus généralement, à chaque $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *on associe*

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

...Dans $\mathbb{R}^3$ *muni de la base canonique, il faut reconnaître que ce n'est pas très impressionnant !*

Exemple 2 (*Moins trivial*)

- *Considérons l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni de sa base canonique* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = (1, X, X^2)$.

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$*, alors il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $P = aX^2 + bX + c$.

  $\rightsquigarrow$*Les coordonnées de* P *dans la base* $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}$ *sont* (c, b, a) *: on lui associe la matrice-colonne*

$$[P]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

  Ainsi, si $P_1 = X^2 - 1$*,* $P_2 = 1 + X$ *et* $P_3 = X^2 + X + 1$

$$[P_1]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [P_2]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, [P_3]_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}_2[X]}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \tag{1}$$

- *Considérons, dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *des suties réelles, le sous espace vectoriel*

$$F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

  Alors, comme vous avez fait Techniques de calcul, vous savez que $((-1)^n)_n, (2^n)_n \in F$ *et que toute suite* $(u_n)_n \in F$ *est combinaison linéaire de ces deux-là :*

$$(u_n)_n \in F \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \ t.q. \ u_n = a(-1)^n + b2^n$$

  $\rightsquigarrow$ *Les suites* $v_n = ((-1)^n)_n$ *et* $w_n = (2^n)_n$ *forment une famille génératrice de* F*, et puisqu'elles ne sont pas colinéaires, c'est une famille libre. Donc* $((v_n)_n, (w_n)_n)$ *est une base de* F.

  Dans la base $\mathscr{B}_F = ((v_n)_n, (w_n)_n)$ *de* F*, les coordonnées de* $(u_n)_n$ *sont* (a, b) *: on lui associe la matrice colonne*

$$[(u_n)_n]_{\mathscr{B}_F} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Avantage : *On peut facilement traduire les problèmes d'algèbre linéaire en systèmes.*

Exemple 3 (*Application*)

Montrons que (P_1, P_2, P_3) *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*, où*

$$P_1 = X^2 - 1, P_2 = 1 + X, P_3 = X^2 + X + 1$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *tels que* $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$*. En utilisant* (1)*, ceci se réécrit :*

Matrice d'une application linéaire

On a vu au chapitre 5 qu'à toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut associer une application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{K}^p &\to \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ On va voir que réciproquement, à toute application linéaire entre espaces vectoriels **de dimension finie**, on peut associer une matrice.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Rappelons qu'on a fixé

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p) \text{ une base de } E, \ \mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_n) \text{ une base de } F$$

On a vu au chapitre 5 que si on connaît $f(e_1), \ldots, f(e_p)$, on peut en déduire $f(x)$ pour tout x.

Or, pour $j \in \{1, ..., p\}$, $f(e_j) \in F$, donc il existe des scalaires $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + \ldots + a_{n,j} f_n$$

En somme :

- Pour connaître $f(x)$ pour tout x, il suffit de connaître $f(e_1), \ldots, f(e_p)$;
- Pour connaître $f(e_j)$, il suffit de connaître ses coordonnées $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ dans la base $\mathscr{B}'$

$\rightsquigarrow$ Donc pour "connaître" f, il suffit de connaître $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Ca a une tête de matrice !

$\rightsquigarrow$ On en déduit la définition suivante :

Définition 4

La **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** *est la matrice $(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est donnée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'$. On la note :*

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \\ f_n \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(e_1)]_{\mathscr{B}'} & \dots & [f(e_p)]_{\mathscr{B}'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, on choisit généralement la même base $\mathscr{B}$ sur E au départ et à l'arrivée.
$\rightsquigarrow$ On note alors la matrice de f dans cette base $[f]_{\mathscr{B}}$.

Remarque 5

- *La matrice de f est de taille $\dim F \times \dim E$.*
- ⚠ *La matrice de f dépend des bases choisies sur E et F : si on les change, on n'obtient pas les mêmes coefficients.*

Exemple 6

Considérons $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$.

1. *On considère les bases canoniques $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_0' = (f_1, f_2)$ sur $\mathbb{R}^2$:*

$$\mathscr{B}_0 = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \; \mathscr{B}_0' = \left(f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors on a :

$$\begin{cases} f(e_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(e_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(e_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}_0'$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. *On considère maintenant les bases $\mathscr{B}_1 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_1' = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ données par :*

$$\mathscr{B}_1 = \left(\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \; \mathscr{B}_1' = \left(\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors

$$\begin{cases} f(\tilde{e}_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(\tilde{e}_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(\tilde{e}_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Entraînement 7

3. *Calculons $[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_1}$:*

$$\begin{cases} f(e_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(e_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \\ f(e_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot \tilde{f}_1 + \boxed{} \cdot \tilde{f}_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'_1$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

4. *Calculons $[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_0}$:*

$$\begin{cases} f(\tilde{e}_1) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(\tilde{e}_2) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \\ f(\tilde{e}_3) = \boxed{} = \boxed{} \cdot f_1 + \boxed{} \cdot f_2 \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_0$ est

$$[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exemple 8

1. *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors on a vu que $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2)$ est une base de E. On considère l'application de dérivation :*

$$D : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X]$$

Alors

$$\begin{cases} D(1) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot 1 + \boxed{\quad} \cdot X + \boxed{\quad} \cdot X^2 \\ D(X) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot 1 + \boxed{\quad} \cdot X + \boxed{\quad} \cdot X^2 \\ D(X^2) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot 1 + \boxed{\quad} \cdot X + \boxed{\quad} \cdot X^2 \end{cases}$$

Donc la matrice de l'endomorphisme[1] *D dans la base $\mathscr{B}_0$ est*

$$[D]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2. *Condidérons cette fois la base $\mathscr{B}_1 = (P_1, P_2, P_3)$, où*

$$P_1 = X^2 - 1, P_2 = 1 + X, P_3 = X^2 + X + 1$$

Alors

$$\begin{cases} D(P_1) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot P_1 + \boxed{\quad} \cdot P_2 + \boxed{\quad} \cdot P_3 \\ D(P_2) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot P_1 + \boxed{\quad} \cdot P_2 + \boxed{\quad} \cdot P_3 \\ D(P_3) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\quad} \cdot P_1 + \boxed{\quad} \cdot P_2 + \boxed{\quad} \cdot P_3 \end{cases}$$

Donc la matrice de D dans la base $\mathscr{B}_1$ est

$$[D]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Matrice de l'application Id_E : Considérons l'application identité $\mathrm{Id}_E : x \in E \mapsto x \in E$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ n'importe quelle base de E. Alors

$$\mathrm{Id}_E(e_j) = e_j = 0 \cdot e_1 + \ldots + 1 \cdot e_j + \ldots + 0 \cdot e_p$$

donc

$$[\mathrm{Id}_E(e_j)]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \text{ et } [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I_p$$

Opérations sur les matrices

Proposition 9 (*Image d'un vecteur par une application linéaire*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E et F respectivement. Pour $x \in E$, $y \in F$, on note

$$A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}, \ X = [x]_{\mathscr{B}}, \ Y = [y]_{\mathscr{B}'}$$

$$\text{Alors } \boxed{y = f(x) \iff Y = AX}$$

Preuve :

Exemple 10

Soient $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. On a vu que dans les bases canoniques $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_0'$ de $\mathbb{R}^2$,

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}, \ [u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Alors $f(u) = (3,2)$ et on a bien

$$[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_0'}[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = [f(u)]_{\mathscr{B}_0'}.$$

...A nouveau, dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, ce n'est pas très impressionnant.

Exemple 11 (*Application : noyau d'une application linéaire*)

Reprenons l'application de dérivation dans $\mathbb{R}_2[X]$, *notée* D. *Pour tout* $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(D) &\iff D(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff [D(P)]_{\mathscr{B}_0} = 0_{3,1} \\ &\iff [D]_{\mathscr{B}_0}[P]_{\mathscr{B}_0} = 0_{3,1} \end{aligned}$$

Or on a vu que

$$[D]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}, \, [P]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(D) &\iff \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \quad \\ \quad \end{cases} \\ &\iff a = b = 0 \iff P = c \end{aligned}$$

Donc le noyau de D *est l'ensemble des polynômes constants (bon, on s'en doutait !)*

Entraînement 12

On a vu que la matrice de D *dans la base* $\mathscr{B}_1 = (P_1, P_2, P_3)$ *est*

$$[D]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}.$$

Soit $P(X) = 2X^2 + 3X + 2 \in \mathbb{R}_2[X]$. *Alors, d'une part*

$$D(P) = P'(X) = \qquad\qquad\qquad = \boxed{} \cdot P_1 + \boxed{} \cdot P_2 + \boxed{} \cdot P_3$$

et d'autre part

$$[D(P)]_{\mathscr{B}_1} = [D]_{\mathscr{B}_1}[P]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ *Est-ce cohérent ?*

Proposition 13 (*Opérations sur les matrices*)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On se donne une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F. Alors :

- $[f+g]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} + [g]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$
- $[\lambda f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \lambda [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

Preuve :[2]

Corollaire 14

L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} : f \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme linéaire.

Preuve :

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ une application linéaire :

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est injective :

2. *Indications :* Il s'agit donc de trouver les coordonnées d'une part de $(f+g)(e_1), ..., (f+g)(e_p)$ et d'autre part de $(\lambda f)(e_1), \dots, (\lambda f)(e_p)$ dans la base $\mathscr{B}'$.

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est surjective :

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une application linéaire bijective, donc c'est un isomorphisme. $\square$

Remarque 15

En particulier, $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.
(Pourquoi, au fait ?)

Théorème 16 (*Produit matriciel et composée*)

Soit G un troisième e.v. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F, $\mathscr{B}''$ une base de G. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$[g \circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \cdot [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Preuve : On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathscr{B}'' = (g_1, \dots, g_q)$ et

$$A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad B = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix}, \quad C = [g \circ f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = (c_{ij})$$

$\rightsquigarrow$ On veut montrer que pour tous $1 \le i \le q, 1 \le j \le p$,

$$c_{ij} = (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Calculons la j-ème colonne de C our trouver c_{ij}. On a d'une part

$$g \circ f(e_j) = \_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_ \; g_q$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) = g(f(e_j)) &= g(\_\_\_\_\_ \; f_1 + \dots + \_\_\_\_\_ \; f_n) \\ &= \_\_\_\_\_ \; g(f_1) + \dots + \_\_\_\_\_ \; g(f_n) \\ &= \_\_\_\_\_ \; (\_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_ \; g_q) + \dots + \_\_\_\_\_ \; (\_\_\_\_\_ \; g_1 + \dots + \_\_\_\_\_ \; g_q) \\ &= (\_\_\_\_\_ \; + \dots + \_\_\_\_\_ \;)g_1 + \dots + (\_\_\_\_\_ \; + \dots + \_\_\_\_\_ \;)g_q \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}''$, on a donc, pour $i \in \{1, ..., q\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$,

$$c_{ij} = \boxed{}$$

$\square$

Corollaire 17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E)$$

Soit $A = [f]_{\mathscr{B}}$, alors

$$[f^k]_{\mathscr{B}} = A^k$$

Exemple 18

Soient

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2, \quad g : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a + b, a - b) \in \mathbb{R}^2$$

Dans les bases canoniques $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'_0$ de $\mathbb{R}^2$,

$$[f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad [g]_{\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

On a, d'une part, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g \circ f(x, y, z) = g(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

donc

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Et, d'autre part,

$$[f]_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}'_0} [g]_{\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Proposition 19 (*Matrice d'un isomorphisme*)

Supposons que $\dim E = \dim F$. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E et F respectivement. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = [f]_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

1. *f est un isomorphisme ssi A est inversible.*
2. *Si f est un isomorphisme, alors $[f^{-1}]_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} = A^{-1} = [f]^{-1}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$.*

Preuve : Pour 1., on procède par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est bijective. Alors $f^{-1}: F \to E$ existe et est linéaire. Notons $B = [f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Alors $AB =$

$BA =$

donc A est inversible, d'inverse $B = [f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ (ce qui, dans la foulée, prouve 2.)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A = [f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible. Notons $B = A^{-1}$.

On a vu plus haut que l'application

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} : g \in \mathcal{L}(F,E) \mapsto [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est ___________. Il existe donc $g : F \to E$ linéaire telle que ___________.
Montrons que $g = f^{-1}$. On a

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}} =$$

donc, par injectivité de l'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$, on a $g \circ f =$ ____.
On obtient de même $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On en déduit que f est bijective : c'est donc un isomorphisme, et

$$[f^{-1}]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = A^{-1}.$$

$\square$

Changement de base

On a vu que les coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$, que l'on a notées $[x]_{\mathscr{B}}$, ainsi que la matrice $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une application linéaire f, dépendent des bases considérées $\mathscr{B}$ sur E et $\mathscr{B}'$ sur F.

Question : Si l'on choisit des bases différentes $\mathscr{B}_1$ sur E et $\mathscr{B}'_1$ sur F, peut-on déterminer $[x]_{\mathscr{B}_1}$ à partir de $[x]_{\mathscr{B}}$ et $[f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1}$ à partir de $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$?

Revenons dans $\mathbb{R}^3$ et prenons une base non canonique, par exemple

$$\mathscr{B}_1 = \big(e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1)\big)$$

On a vu que le vecteur $u = (1,2,\sqrt{\pi})$ est associé, via la base canonique, à la matrice colonne

$$[u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

Cependant, la matrice colonne correspondant à u dans la base $\mathscr{B}_1$ ne sera pas la même !

$\rightsquigarrow$ Y a-t-il un procédé qui permette de déduire directement $[u]_{\mathscr{B}_1}$ du vecteur colonne $[u]_{\mathscr{B}_0}$?

Définition 20 (*Matrice de passage*)

*Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_p), \mathscr{B}_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ vers $\mathscr{B}_1$**, notée $P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est donnée par les coordoonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B}_0$.*

Proposition 21

$P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$ est la matrice de $\mathrm{Id}_E : E \to E$ dans les bases $\mathscr{B}_1$ au départ et $\mathscr{B}_0$ à l'arrivée :

$$P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} = [\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0}$$

Preuve : Par définition de la représentation matricielle, la j-ième colonne de $[\mathrm{Id}_E]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_0}$ est donnée par :

ce qui correspond à la j-ième colonne de $P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$.

Exemple 22

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathscr{B}'_0 = (f_1, f_2)$ et la base

$$\mathscr{B}'_1 = \left(f'_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f'_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Alors

$$P_{\mathscr{B}'_0,\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$\begin{cases} f_1 = \boxed{} \cdot f'_1 + \boxed{} \cdot f'_2 \\ f_2 = \boxed{} \cdot f'_1 + \boxed{} \cdot f'_2 \end{cases} \quad \text{donc } [f_1]_{\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \ [f_2]_{\mathscr{B}'_1} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

et

$$P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Exemple 23

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ *la base canonique* $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ *et la base* $\mathscr{B}_1$ *donnée par*

$$\mathscr{B}_1 = \left(e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors

$$\begin{cases} e_1' = \boxed{}\ e_1 + \boxed{}\ e_2 + \boxed{}\ e_3 \\ e_2' = \boxed{}\ e_1 + \boxed{}\ e_2 + \boxed{}\ e_3 \\ e_3' = \boxed{}\ e_1 + \boxed{}\ e_2 + \boxed{}\ e_3 \end{cases} \text{ donc } P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Réciproquement, on a

$$\begin{cases} e_1 = \boxed{}\ e_1' + \boxed{}\ e_2' - \boxed{}\ e_3' \\ e_2 = \boxed{}\ e_1' - \boxed{}\ e_2' + \boxed{}\ e_3' \\ e_3 = \boxed{}\ e_1' + \boxed{}\ e_2' + \boxed{}\ e_3' \end{cases} \text{ donc } P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Proposition 24

Soient $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ *trois bases sur* E*. Alors*

- $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}$ *est inversible, et* $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1}^{-1} = P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0}$
- $P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1} \cdot P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}$

Preuve :

Proposition 25 (*Changement de base pour les vecteurs*)

Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{B}_1 = (e'_1, \dots e'_p)$ *deux bases de* E. *Soit* $x \in E$, *alors il existe des coordonnées* $x_1, \dots, x_p$ *et* $x'_1, \dots, x'_p$ *telles que* $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j e'_j$. *On note*

$$X = [x]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \; X' = [x]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

Alors

$$\boxed{X = P_{\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1} X'}.$$

Preuve :

Exemple 26

Reprenons notre exemple du début : considérons la base

$$\mathscr{B}_1 = \big(e'_1 = (1,1,0), e'_2 = (1,0,1), e'_3 = (0,1,1)\big)$$

et le vecteur $u = (1, 2, \sqrt{\pi})$. *Alors*

$$P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{pmatrix} \text{ et } [u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix}$$

donc on a

$$[u]_{\mathscr{B}_1} = P_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_0} [u]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \end{pmatrix}$$

et on vérifie bien que

$$u = \frac{3 - \sqrt{\pi}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{\pi} - 1}{2} f_2 + \frac{\sqrt{\pi} + 1}{2} f_3$$

Proposition 27 (*Changement de base pour les applications linéaires*)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1$ *deux bases de* E, $\mathscr{B}'_0, \mathscr{B}'_1$ *deux bases de* F. *On note*

$$A = [f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_0},\ B = [f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1},\ P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1},\ Q = P_{\mathscr{B}'_0,\mathscr{B}'_1}$$

Alors on a

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}, \quad \text{i.e. } [f]_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'_1} = P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0}[f]_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_0}P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$$

Preuve : On écrit $f : (E,\mathscr{B}_1) \to (F,\mathscr{B}'_1)$ comme la composée

$$(E,\mathscr{B}_1) \xrightarrow[\mathrm{Id}_E]{} (E,\mathscr{B}_0) \xrightarrow[f]{} (F,\mathscr{B}'_0) \xrightarrow[\mathrm{Id}_F]{} (F,\mathscr{B}'_1,)$$

ce qui, en matrices, donne

Exemple 28

On a vu que la matrice de l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans les base canoniques } \mathscr{B}_0 \text{ et } \mathscr{B}'_0$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dans les bases } \mathscr{B}_1 \text{ et } \mathscr{B}'_1$$

On a aussi calculé

$$P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q^{-1} = P_{\mathscr{B}'_1,\mathscr{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

Corollaire 29

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endormorphisme,* $\mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1$ *deux bases de* E.
On note $A = [f]_{\mathscr{B}_0},\ B = [f]_{\mathscr{B}_1},\ P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1}$ *Alors*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Définition 30 (*Matrices semblables*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que B est **semblable** *à A s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 31

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endormorphisme dans deux bases différentes.

Chapitre VII - Déterminant d'une matrice

Introduction

On notera, comme toujours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a vu que les matrices permettent de représenter

- les applications linéaires
- les systèmes linéaires
- (on va le voir) les familles de vecteurs.

Le déterminant d'une matrice *carrée* A est un réel associé à A qui suffit à déterminer si A est inversible, ce qui nous permettra de dire, en un seul calcul

- si une application linéaire est bijective
- si un système admet une unique solution
- si une famille de vecteurs est une base.

Déterminants de petites matrices

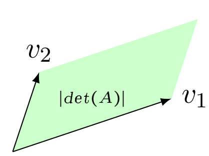
Définition 1 (*Déterminant d'une matrice 2×2*)

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Son déterminant est défini par*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Interprétation géométrique 2

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $|\det(A)|$ *est l'aire du parallélogramme délimité par les vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ *:*



En particulier, $\det(A) = 0$ *ssi les vecteurs* v_1 *et* v_2 *sont colinéaires.*

Entraînement 3

- $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

Définition 4 (*Déterminant d'une matrice 3×3*)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors son déterminant est défini par

$$\begin{aligned}\det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

Moyen mnémotechnique :

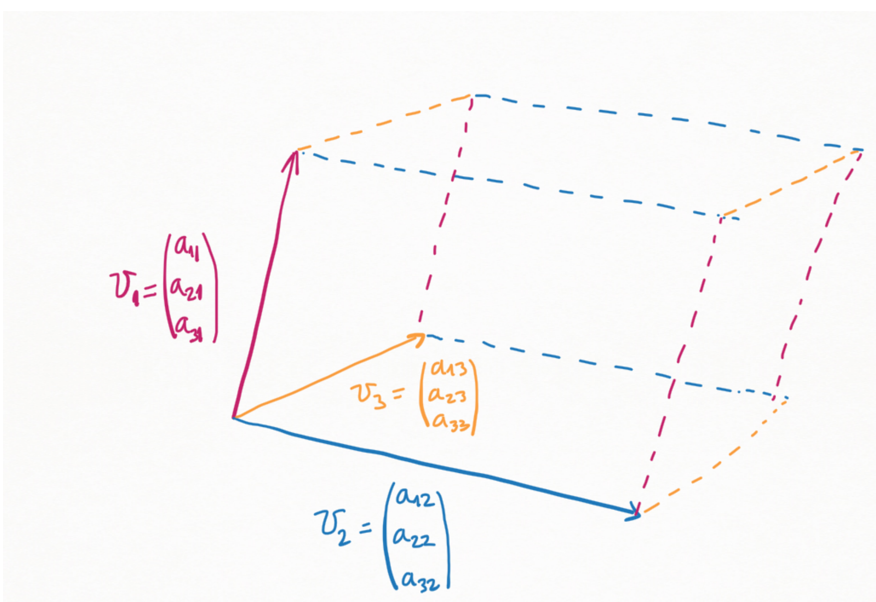
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Interprétation géométrique 5

Notons v_1, v_2, v_3 les vecteurs colonnes de A :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors $|\det(A)|$ est le volume du parallélépipède délimité par v_1, v_2 et v_3 :



En particulier, $\det(A) = 0$ ssi ce parallélépipède est plat, autrement dit ssi $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \leq 2$, autrement dit, ssi ces vecteurs sont liés.

Exemple 6

- $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

- $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

Déterminant - cas général

Définition 7

On définit l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *par récurrence sur* n *comme suit :*

- *Pour* $n = 1$, $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ *et on pose* $\det(A) = a$.

- *Pour* $n > 1$, *pour* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *on note* $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en supprimant la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne de* A. *De là, on définit*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$$

Exemple 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4} \cdot \boxed{} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Petites dimensions

Vérifions que cette formule nous redonne le “bon” résultat pour les matrices 2×2 et 3×3.

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\det(A) = a \det(d) - b \det(c) = ad - bc$$

$\rightsquigarrow$ On retrouve donc bien la définition donnée plus tôt pour les déterminants 2×2.

- **Exercice :** Montrons que la formule de récurrence redonne bien notre formule des déterminants 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \boxed{} \begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \boxed{} \begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \boxed{} \begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix}$$

$$=$$

Propriétés du déterminant

Définition 9

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $\det(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est v_j.

Proposition 10 (*Propriétés fondamentales*)

1. $\det(I_n) = 1$
2. $\det(v_1, \dots, v_k + v'_k, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v'_k, \dots, v_n)$
   et $\det(v_1, \dots, \lambda v_k, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$.
3. *S'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$ alors* $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Preuve : On procède par récurrence sur n, où la matrice est de taille $n \times n$ et on montre 1., 2. et 3. simultanément :

$\boxed{n = 1}$

1. $\det(I_1) = \det(1) = 1$ ✓
2. $\det((a) + (a')) = a + a' = \det(a) + \det(a')$
   et $\det(\lambda a) = \lambda a = \lambda \det(a)$ ✓
3. Ne s'applique pas pour $n = 1$ (on ne peut pas avoir $i \neq j$) donc ben....✓

$\boxed{n=2}$ [1]

1. $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 - 0 * 0 = 1$ ✓

2. $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d - b(c+c') = (ad-bc) + (a'd - bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

   et $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = (\lambda a)d - b(\lambda c) = \lambda(ad-bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ✓

3. $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$ ✓

$\boxed{n=3}$ [2] A chaque fois, les accolades sous l'équation viennent de l'hypothèse de récurrence.

1. $\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\det I_2 = 1} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ ✓

2. $$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 + a_1') \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 + a_2' & c_2 \\ a_3 + a_2' & c_3 \end{vmatrix}}_{= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2' & c_2 \\ a_3' & c_3 \end{vmatrix}} + c_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 + a_2' & b_2 \\ a_3 + a_2' & b_3 \end{vmatrix}}_{= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2' & b_2 \\ a_3' & b_3 \end{vmatrix}}$$

   $$= \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \left(a_1' \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2' & c_2 \\ a_3' & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2' & b_2 \\ a_3' & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

   $$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

   et $$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\lambda a_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_2 & c_2 \\ \lambda a_3 + a_2' & c_3 \end{vmatrix}}_{=\lambda \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} + c_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda a_2 & b_2 \\ \lambda a_3 + a_2' & b_3 \end{vmatrix}}_{=\lambda \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \checkmark$$

3. On le fait pour le cas $v_1 = v_2$, je vous laisse vérifier les autres !

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}}_{=0} = 0 \checkmark$$

$\boxed{n \rightsquigarrow n+1}$ C'est technique et on est fatigués...on va l'admettre. Voir annexe.

1. Ce n'est pas nécessaire à la peuve, mais c'est plus éclairant que le cas $n = 1$!
2. Ce n'est pas non plus nécessaire à la preuve, mais ça permet de voir comment la récurrence va marcher.

Remarque 11

- *La propriété 2. dit que l'application*

$$v \in \mathbb{K}^n \mapsto \det(v_1, \ldots, v, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}$$

est linéaire.

$\rightsquigarrow$ *On dit que le déterminant est* multilinéaire.

(Une application $f : E \times \ldots \times E \to F$ est dite multilinéaire si, pour tout i,

$$v \in E \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1} \ldots, v_n) \in F$$

est linéaire.)

$\rightsquigarrow$ *En particulier, si une des colonnes de A est nulle, alors* $\det(A) = 0$.

• *Les applications multilinéaires qui vérifient 3. sont dites* alternées.

• *On peut montrer que* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est la seule application qui vérifie ces trois propriétés. C'est parfois comme cela qu'on le définit : c'est l'unique application multilinéaire alternée $\mathbb{K}^n \times \cdot .. \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ telle que* $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$ *où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Exemple 12

Utiliser ces règles et les exemples qu'on a déjà faits pour calculer

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{}$ 3

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{}$

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{}$

Proposition 13

> *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Si on échange deux colonnes v_k et v_l, le déterminant $\det(v_1, \ldots, v_n)$ change de signe.*

Preuve : Calculons

$$\det(v_1, \ldots, \underbrace{v_k + v_l}_{k\text{-ième colonne}}, \ldots, \underbrace{v_k + v_l}_{l\text{-ième colonne}}, \ldots, v_n)$$

Puisque cette matrice a deux colonnes égales (à $v_k + v_l$), on a

$$\begin{aligned}
0 &= \det(v_1, \ldots, v_k + v_l, \ldots, v_k + v_l, \ldots, v_n) \\
&= \underbrace{\det(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_n)}_{=0} + \det(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_l, \ldots, v_n) \\
&\quad + \det(v_1, \ldots, v_l, \ldots, v_k, \ldots, v_n) + \underbrace{\det(v_1, \ldots, v_l, \ldots, v_l, \ldots, v_n)}_{=0}
\end{aligned}$$

d'où $\det(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_l, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_l, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$. □

Exemple 14

> *Utiliser ces règles et les exemples qu'on a déjà faits pour calculer*
>
> - $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$
> - $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$
> - $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$

Déterminants et bases

Proposition 15

> *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base.*

Preuve : On procède par double implication :

$\boxed{\Leftarrow}$ On va montrer que si $(v_1, ..., v_n)$ est une base, alors $\det(v_1, ..., v_n) \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ Supposons que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base. On va procéder par l'absurde : supposons que

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, pour chaque $j \in \{1, ...n\}$, il existe des scalaires $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ tels que

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Mais alors :

- D'une part, $\det(e_1, \dots, e_n) = \det(I_n) = \boxed{}$;
- D'autre part,

$$\det(e_1, \dots, e_n) =$$

En utilisant successivement la linéarité par rapport à chaque colonne, on obtient que $\det(e_1, \dots, e_n)$ est une somme de termes du type

donc $\det(e_1, \dots, e_n) = 0$.

$\rightsquigarrow$ 1=0!! Contradiction.

$\boxed{\Rightarrow}$ On procède par contraposée : on montre que si $(v_1, ..., v_n)$ n'est pas une base alors $\det(v_1, ..., v_n) = 0$.

Supposons donc que $(v_1, \dots, v_n)$ n'est pas une base. C'est donc une famille liée : En effet,

$\rightsquigarrow$ L'un des v_k, disons v_n, est donc combinaison linéaire des autres : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, on en déduit

$$\det(v_1, \dots, v_n) =$$

Or chacun des termes est un déterminant dont deux colonnes sont égales, donc vaut $\boxed{}$. On a donc bien $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$. $\square$

Déterminants et matrices inversibles

Corollaire 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* A *est inversible ssi* $\det(A) \neq 0$.

Preuve : On procède, sans grande surprise, par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Déterminant d'un produit

Théorème 17

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$

Preuve : Ce résultat technique est admis : voir complément.

Corollaire 18

Si A *est inversible,* $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

Preuve :

Déterminant d'un endomorphisme

Une application de ce dernier résultat est le suivant : *deux matrices semblables ont le même déterminant*. En effet, si $B = P^{-1}AP$, on a

$$\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

En particulier, si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$\det([f]_{\mathscr{B}}) = \det([f]_{\mathscr{B}'})$$

On peut donc définir

Définition 19

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de dimension finie. On définit le déterminant de f par

$$\det(f) = \det([f]_{\mathscr{B}})$$

pour une base $\mathscr{B}$ quelconque de E.

Calculs de déterminants

Proposition 20 (*Déterminant de la transposée*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$.

Ainsi, les propriétés qu'on a vu sur les *colonnes* de A, via la transposée, s'appliquent aussi aux *lignes* de A. En particulier :

- det est linéaire par rapport à chaque ligne de A
- $\det A \neq 0$ ssi les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
- Le déterminant change de signe si on échange deux lignes.

Définition 21

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. On appelle **cofacteur** *de A par rapport au coefficient a_{ij} le nombre*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Théorème 22 (*Développement par rapport à une ligne ou une colonne*)

- *Développement par rapport à la i-ème ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

- *Développement par rapport à la j-ème colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

Plan de la preuve

Rappelons qu'on a défini le déterminant par la formule de développement par rapport à la première ligne.

▸ Pour démontrer la formule de développement par rapport à la i-ème ligne, on va utiliser le fait que permuter deux lignes change le signe du déterminant.

⇝ En effet, du coup, si on permute la i-ème ligne "vers le haut" de proche en proche, jusqu'à ce qu'elle soit tout en haut de A, on change le signe du déterminant à chaque fois.

⇝ Autrement dit, au bout de $i-1$ permutations, on obtient une nouvelle matrice $\tilde{A}$ dont la première ligne est la i-ème ligne de A et toutes les suivantes sont dans le même ordre que A. Et cette matrice vérifie

$$\det(A) = (-1)^{i-1} \det(\tilde{A})$$

⇝ On calcule $\det(\tilde{A})$ en développant par rapport à la 1ère ligne pour avoir le résultat.

▸ La formule sur les colonnes s'en déduit en appliquant celle qu'on vient de démontrer à ${}^tA$.

Exemple 23

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

⇝ *Par rapport à quelle ligne/colonne développer pour minimiser l'effort ?*

Opérations élémentaires

D'après les propriétés du déterminant, on peut effectuer des opérations sur les colonnes C_j et les lignes L_i de A , ce qui modifie le déterminant comme suit.

Proposition 24

Si on obtient $\tilde{A}$ à partir de A par :

- $L_i \leftrightarrow L_j$, *ou* $C_i \leftrightarrow C_j$ *alors* $\det \tilde{A} = -\det A$
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, *ou* $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ *alors* $\det \tilde{A} = \det A$
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$, *ou* $C_i \leftarrow \alpha C_i$ *alors* $\det \tilde{A} = \alpha \det A$

Stratégie : on utilise les opérations sur les lignes et les colonnes (notamment la deuxième) pour faire apparaître le plus de zéros possibles sur une ligne ou une colonne donnée, et on développe par rapport à celle-ci.

Exemple 25

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Matrices triangulaires

Proposition 26

Le déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale) est le produit des coefficients diagonaux.

Preuve :

Applications

Définition 27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On note* C_{ij} *ses cofacteurs. Alors la matrice* $Com(A) = (C_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est appelée la* comatrice de A

Proposition 28 (*Inverse d'une matrice via la comatrice*)

Si A *est une matrice inversible, alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)}$$

Preuve

Montrons que $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$ (que A soit inversible ou non). Le (i,j)-ième coefficient de $A^t\mathrm{Com}(A)$ est donné par $\sum_{k=1}^n a_{ik}C_{jk}$.

- Si $i = j$, cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} =$$

- Si $i \neq j$, appelons A' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant L_j par L_i.

$\rightsquigarrow$ Alors A' a deux lignes identiques, donc $\det(A') = \boxed{}$.

On note C'_{kl} ses cofacteurs, alors on a pour tout k, $C'_{jk} = C_{jk}$ et on a :

donc si $i \neq j$ le (i,j)-ième coefficient de $A^t\mathrm{Com}(A)$ est $\boxed{}$.

$\rightsquigarrow$ On a donc bien $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$. □

Exemple 29

- *On suppose que $ad - bc \neq 0$. Alors si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a*

  $A^{-1} =$

- *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

  Alors

  $\det(A) =$

  $\mathrm{Com}(A) =$

  donc A est inversible et par la proposition précédente, $A^{-1} =$

Méthode de Cramer

Considérons le système linéaire

$$(\star)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff AX = B$$

Pour $j \in \{1, ..., n\}$, on note A_j la matrice obtenue en remplaçant la j-ième colonne de A par le vecteur-colonne B :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 30

Si $\det(A) \neq 0$, *le système* $(\star)$ *admet une unique solution* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *donnée par*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Preuve :

Exemple 31

Considérons le système

$$(\star)\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A) = \boxed{}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A_1) = \boxed{}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \det(A_2) = \boxed{}$$

donc la solution de $(\star)$ *est*

$$\begin{cases} x = \boxed{} \\ y = \boxed{} \end{cases}$$