Prop. 15 Soit E un e.v. de dim finie. $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie
(ça existe car E est de dimension finie)

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. Alors il existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ tq $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ est une base

Preuve On note $\mathcal{L} = \{v_1 \dots v_k\}$ et on cherche $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ tq $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ est une base.

- Si $\mathcal{L}$ est génératrice, alors c'est déjà une base et on prend $\mathcal{F} = \emptyset$
- Si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice, alors il existe $g_1 \in \mathcal{G}$ tq $g_1 \notin Vect(\mathcal{L})$

Preuve Supposons par l'absurde que, $\forall g \in \mathcal{G}$, $g \in Vect(\mathcal{L})$. On a alors

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{G} \subset Vect(\mathcal{L}) \\ Vect(\mathcal{L}) \text{ est un sev}\end{array}\right)$ Donc $Vect(\mathcal{G}) \subset Vect(\mathcal{L})$

↳ car $Vect(\mathcal{G})$ est le plus petit sev qui contient $\mathcal{G}$

Or $\mathcal{G}$ génératrice donc $Vect(\mathcal{G}) = E$ Donc on a
$E \subset Vect(\mathcal{L}) \subset E$, ie $Vect(\mathcal{L}) = E$ Donc $\mathcal{L}$ est génératrice, ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\mathcal{G} \not\subset Vect(\mathcal{L})$
Donc $\exists g_1 \in \mathcal{G}$ tq $g_1 \notin Vect(\mathcal{L})$ ✓

Soit donc $g_1 \in \mathcal{G}$ tq $g_1 \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.

$\mathcal{L} = \{v_1 \dots v_k\}$

Posons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{g_1\}$. Alors $\mathcal{L}_1$ est libre

↳ Preuve

Soient $\lambda_1 \dots \lambda_k, \mu$ des scalaires tq $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu g_1 = 0_E$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu = 0$.

→ si $\mu \neq 0$ on a $g_1 = \left(-\frac{\lambda_1}{\mu}\right) v_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\mu}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\mu}\right) v_k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$

→ contradiction : on a forcément $\boxed{\mu = 0}$

→ du coup, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0_E$. Or $\mathcal{L} = \{v_1 \dots v_k\}$ est libre, donc

on en déduit $\boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0}$ ✓

→ On recommence avec $\mathcal{L}_1$ à la place de $\mathcal{L}$

- Si $\mathcal{L}_1$ est génératrice, c'est une base et on prend $\mathcal{J} = \{g_1\}$
- Sinon, comme précédemment, $\mathcal{G} \not\subset \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$ donc il existe $g_2 \in \mathcal{G}$ tq $g_2 \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L}_1)$

et donc $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \cup \{g_2\}$ est libre.

→ Si $\mathcal{L}_2$ est génératrice, on prend $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$

→ sinon, $\exists g_3 \in \mathcal{G}$ tq $g_3 \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L}_2)$ ... et on recommence !

Puisque $\mathcal{G}$ est finie, ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini ($\leq \mathrm{Card}\,\mathcal{G}$) d'étapes, et on a alors obtenu une base. $\square$