Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2022-2023

Contrôle continu 1

Durée : 1h.
Expliquez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.
Bon courage !

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant, dépendant du paramètre α :

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\alpha)x & + & & & z & = & 0 \\ x & + & (1-\alpha)y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & & & (1+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. *Avant de résoudre le système,* déterminer, parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ou fausses. Justifier brièvement (à l'aide d'un résultat du cours).

   (a) Il est possible que (S_α) n'aie aucune solution.

   (b) Il est possible que (S_α) aie une unique solution.

   (c) Il est possible que (S_α) aie exactement trois solutions.

   (d) Il est possible que $x = \pi, y = 0, z = -\pi$ soit une solution de (S_α).

   (e) Si $\mathrm{rg}(S_\alpha) = 3$, alors (S_α) a une unique solution.

   (f) Si $\mathrm{rg}(S_\alpha) = 2$, alors (S_α) a une infinité de solutions.

2. *On s'attaque maintenant à la résolution :* Montrer que (S_α) admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$. Donner l'ensemble des solutions dans les trois cas $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha \neq 0, 1$.
3. Montrer que $(-1, -1, 2)$ est solution du système ssi $\alpha = 0$.
4. Montrer que $(1, 2, -1)$ et $(-1, 0, 1)$ sont solution du système ssi $\alpha = 1$.

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les traces $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(D)$.
2. Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer PDP^{-1}.
4. Donner D^n, pour tout $n \geq 1$. En déduire A^n.

Suite du sujet au dos ☛

Exercice 3
On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on note :

$$F_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

1. Justifier que F_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $F_0 \cap F_1$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?