Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant, dépendant du paramètre α :

$$(S_\alpha)\begin{cases} (2-\alpha)x + z = 0 \\ x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ -2x - (1+\alpha)z = 0 \end{cases}$$

1. *Avant de résoudre le système,* déterminer, parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ou fausses. Justifier brièvement (à l'aide d'un résultat du cours).

   (a) Il est possible que (S_α) n'aie aucune solution.

   (b) Il est possible que (S_α) aie une unique solution.

   (c) Il est possible que (S_α) aie exactement trois solutions.

   (d) Il est possible que $x = \pi, y = 0, z = -\pi$ soit une solution de (S_α).

   (e) Si $\mathrm{rg}(S_\alpha) = 3$, alors (S_α) a une unique solution.

   (f) Si $\mathrm{rg}(S_\alpha) = 2$, alors (S_α) a une infinité de solutions.

Rappel Le rang de S_α ($\mathrm{rg}(S_\alpha)$) est le nombre de pivots (inconnues en début de ligne après échelonnage)

$\to \mathrm{rg}(S_\alpha) \leqslant 3$

$\mathrm{rg}(S_\alpha)$ = nb d'inconnues principales

1.(a) Faux : (S_α) est un système linéaire homogène, donc il admet au moins la solution nulle : $x=0, y=0, z=0$.

(b) Vrai Un système linéaire homogène peut n'admettre que la solution nulle. (ex TD1, ex 1, premier système)

(c) Faux Un système linéaire admet soit aucune, soit une seule, soit une infinité de solutions

→ et ce cas ne se produit pas pour les systèmes homogènes

↳ s'il y a des inconnues libres après échelonnage

(d) Vrai Si (S_α) a une infinité de solutions, il se peut que $(\pi, 0, -\pi)$ soit l'une d'elle (et c'est le cas si $\alpha = 1$)

(e) Vrai Si $\mathrm{rg}(S_\alpha)$ = nb d'inconnues, il n'y a pas d'inconnue libre, et $(0,0,0)$ est la seule solution

(f) Vrai Si $\mathrm{rg}S_\alpha < 3$, il y a des inconnues libres et donc une infinité de solutions

2. *On s'attaque maintenant à la résolution :* Montrer que (S_α) admet des solutions non nulles si, et seulement si, $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$. Donner l'ensemble des solutions dans les trois cas $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha \neq 0, 1$.

$$(S_\alpha) : \begin{cases} (2-\alpha)x + z = 0 \\ 1.x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ -2x - (1+\alpha)z = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ (2-\alpha)x + 1.z = 0 \\ -2x - (1+\alpha)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (2-\alpha)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ -(2-\alpha)(1-\alpha)y + (\overbrace{1-(2-\alpha)}^{\alpha - 1 = -(1-\alpha)})z = 0 \\ 2(1-\alpha)y + (\underbrace{2-(1+\alpha)}_{1-\alpha})z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \to -L_2}{\iff} \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ (2-\alpha)(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \\ 2(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ 2(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \\ (2-\alpha)(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2-\alpha}{2}L_2}{\iff} \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ 2(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \\ \underbrace{\left[(1-\alpha) + \frac{(\alpha-2)}{2}(1-\alpha)\right]}_{(1-\alpha)\left(1 + \frac{\alpha-2}{2}\right) = (1-\alpha)\frac{\alpha}{2}} z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + (1-\alpha)y + z = 0 \\ 2(1-\alpha)y + (1-\alpha)z = 0 \\ \underbrace{\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}}_{= 0 \text{ ssi } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1} z = 0 \end{cases}$$

$\to$ 3 cas : $\alpha = 0, \alpha = 1$ ou $\alpha \neq 0, 1$.

- Si $\alpha = 0$ $\quad S_0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z = \frac{z}{2} - z = -\frac{z}{2} \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$

x, y inconnues principales $\quad z$ inconnue libre

L'ensemble des solutions est $A_0 = \left\{ \left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right),\ z \in \mathbb{R} \right\}$

↳ infinité de solutions

- Si $\alpha = 1$ $\quad S_1 \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x = -z$

x inconnue principale $\quad y, z$ inconnues libres

→ infinités de solutions

L'ensemble des solutions est $A_1 = \left\{ (-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R} \right\}$

- Si $\alpha \neq 0, 1$

→ on peut diviser L_3 par $\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$ et on a

$\begin{cases} x + (1-\alpha)y + 0 = 0 \\ (1-\alpha)y + 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(1-\alpha) \neq 0$ donc on peut diviser L_2 par $(1-\alpha)$ et

$S_\alpha \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

→ Il y a une unique solution $(0,0,0)$.

→ Il y a une infinité de solutions ssi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

3. Montrer que $(-1,-1,2)$ est solution du système $\boxed{\text{ssi}}$ $\alpha = 0$.

4. Montrer que $(1,2,-1)$ et $(-1,0,1)$ sont solution du système $\boxed{\text{ssi}}$ $\alpha = 1$.

3) $(-1,-1,2)$ est solution de (S_α) ssi
$$\begin{cases} (2-\alpha)(-1) + 2 = 0 \\ (-1) + (1-\alpha)(-1) + 2 = 0 \\ -2(-1) - (1+\alpha)2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\ -\cancel{1} + \alpha - \cancel{1} + \cancel{2} = 0 \\ \cancel{2} - \cancel{2} - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ -2\alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = 0$$

$\to (-1,-1,2)$ solution de (S_α) ssi $\alpha = 0$.

$A_0 = \left\{\left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$ $z = 2$ donc $(-1,-1,2)$

4) $(1,2,-1)$ solution de (S_α) ssi
$$\begin{cases} (2-\alpha)\,1 + (-1) = 0 \\ 1 + (1-\alpha).2 + (-1) = 0 \\ -2.1 - (1+\alpha)(-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - \alpha - 1 = 0 \\ 1 + 2 - 2\alpha - 1 = 0 \\ -2 + 1 + \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \alpha = 0 \\ 2 - 2\alpha = 0 \\ -1 + \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = 1$$

$\hookrightarrow (1,2,-1)$ sol. de (S_α) ssi $\alpha = 1$.

$(-1,0,1)$ est solution de (S_α) ssi
$$\begin{cases} (2-\alpha)(-1) + 1 = 0 \\ -1 + (1-\alpha)0 + 1 = 0 \\ -2(-1) - (1+\alpha)\,1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 2 + 1 = 0 \\ -1 + 1 = 0 \\ 2 - 1 - \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = 1$$

$\hookrightarrow (-1,0,1)$ est solution de (S_α) ssi $\alpha = 1$.

$A_1 = \{(-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$

$z = -1$, $y = 2$ donc $(+1, 2, -1)$

$z = 1$ $y = 0$ donc $(-1, 0, 1)$

($z = -\pi$, $y = 0$ donc $(\pi, 0, -\pi)$)

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les traces $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(D)$.

1) Rappel La trace de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$\rightarrow \mathrm{Tr}(A) = 2+1+(-1) = 2$

$\mathrm{Tr}(D) = 0+1+1 = 2$

✓

Rq On va montrer que $PDP^{-1} = A$.

et on sait que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$

$\rightarrow \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\underbrace{PD}_{M}\underbrace{P^{-1}}_{N}) = \mathrm{Tr}(\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D) = \mathrm{Tr}(D)$

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer l'inverse P^{-1} de P.

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérification

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3 \checkmark$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$P \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) I_3$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow -L_1$

$$I_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer PDP^{-1}.

(3) $$PDP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{PD}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Donner D^n, pour tout $n \geq 1$. En déduire A^n.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

4) D est une matrice diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = D$

Preuve (Réc sur n)

$n=1$ $\quad D^1 = D = \begin{pmatrix} 0^1 & 0 & 0 \\ 0 & 1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^1 \end{pmatrix}$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$ Supposons que $D^n = D$ et montrons que $D^{n+1} = D$

$$D^{n+1} = \underset{\uparrow \text{déf puissance de matrices}}{D^n \cdot D} = D \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D \text{ ✓}$$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, D^n = D.$

On a obtenu en (3) que

$A = PDP^{-1}$

donc $A^n = (PDP^{-1})^n$

$$= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n \text{ fois}}$$

$$= PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_3}D\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_3}\cdots DP^{-1}$$

$$= P\underbrace{DD\cdots D}_{n \text{ fois}}P^{-1}$$

$$= PD^nP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$= A$$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, \; A^n = A.$

Exercice 3

On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on note :

$$F_0 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad F_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$$

1. Justifier que F_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$F_0 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}2x+z=0\\x+y+z=0\\-2x-z=0\end{cases}\right\}$$

→ F_0 est l'ensemble des solutions d'un <u>système linéaire homogène</u> donc c'est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(c'est le système S_α avec $\alpha=0$ de l'exercice 1)

<u>Méthode 2</u> Avec la définition d'un sev

- $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ vérifie $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ → $0_{\mathbb{R}^3}\in F_0$ ✓
- Soient $u=(x,y,z)\in F_0$, $v=(x',y',z')\in F_0$. Montrons que $u+v=(x+x',y+y',z+z')\in F_0$.

$$A\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) \underset{\substack{\text{distributivité}\\\text{du produit matriciel}}}{=} \overbrace{A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}^{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ car } u\in F_0} + \underbrace{A\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ car } v\in F_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

→ $u+v\in F_0$ ✓

- Soit $u=(x,y,z)\in F_0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u\in F_0$.

$$A\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \lambda \underbrace{A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ car } u\in F_0} = \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

→ $\lambda u\in F_0$ ✓

F_0 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on note :

$$F_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

2. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrons que F_1 vérifie la définition d'un s.e.v.

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ vérifie $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F_1$ ✓

  $A \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$

- Soient $u = (x,y,z) \in F_1$, $v = (x,y,z) \in F_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

  $\rightarrow$ Montrons que $u + \lambda v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in F_1$

  On a $A(u+\lambda v) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \overset{\text{distributivité}}{=} A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A\cdot\left(\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)$

  $= \underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ car } u \in F_1} + \lambda \underbrace{A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ car } v \in F_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

  $\rightarrow A(u+\lambda v) = u + \lambda v \qquad \longrightarrow u + \lambda v \in F_1$ ✓

$\longrightarrow F_1$ est un s.e.v.

Rq

$F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x + z = x \\ x + y + z = y \\ -2x - z = z \end{cases} \right\}$

$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \right\}$

est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

(c'est S_α pour $\alpha = 1$ de l'ex 1)

Donc c'est un s.e.v.

On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on note :

$$F_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad F_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

3. Déterminer $F_0 \cap F_1$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in F_0 \cap F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} u \in F_0 \\ \text{et} \\ u \in F_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $u \in F_0 \cap F_1 \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow F_0 \cap F_1 \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

et réciproquement, $0_{\mathbb{R}^3} \in F_0$ (voir 1.) donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F_0 \cap F_1$

$0_{\mathbb{R}^3} \in F_1$ (voir 2.) $\rightarrow \{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset F_0 \cap F_1$

$\longrightarrow \boxed{F_0 \cap F_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

$F_0 \cap F_1$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ car l'intersection de 2 s.e.v. est un s.e.v.

Rq On peut aussi dire que $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est un s.e.v., donc $F_0 \cap F_1$ est un s.e.v.