**Université Paris 1**
**L1 MIASHS**
**Algèbre linéaire**
**Année 2022-2023**

# Contrôle continu 2

*Durée : 1h30.*
*Explicitez votre raisonnement, même s'il n'a pas abouti.*
*Bon courage !*

## Question de cours

1. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $F, G$ deux s.e.v. de $E$.
   (a) Donner la formule pour $\dim(F+G)$.
   (b) En utilisant cette formule, montrer que
   $$E = F \oplus G \Rightarrow \left( \begin{array}{c} \dim(F \cap G) = 0 \text{ et} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right)$$
2. Soient $E_1, E_2$ deux e.v. sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition d'une application linéaire $E_1 \to E_2$.
   (b) Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Donner la définition de $\operatorname{Ker} f$.

## Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y - 2z = 0\}$$
$$G = \operatorname{Vect}(v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (3, 0, 1), v_3 = (0, 3, -2))$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(u_1 = (2, 1, 0), u_2 = (2, 0, 1))$. En déduire une base de $F$ et la dimension de $F$.
3. Donner une base de $G$ et la dimension de $G$.
4. $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ?
5. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   *Bonus :* En déduire (sans calcul !) que $\mathbb{R}^3 = F \oplus \operatorname{Vect}(v_3)$.
6. Donner les coordonnées de $v_1$ dans la base $\mathcal{B}$.

## Exercice 2

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $E$.

1. Montrer que la famille $\{f_1 + f_2 - f_3, f_1 - f_2 + f_3\}$ est libre. Est-ce une base de $E$ ?
2. Montrer que la famille $\{f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3\}$ est libre. Est-ce une base de $E$ ?