Question de cours

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux s.e.v. de E.

   (a) Donner la formule pour $\dim(F+G)$.

   (b) En utilisant cette formule, montrer que

$$E = F \oplus G \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \dim(F \cap G) = 0 \text{ et} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{array} \right)$$

1. (a) (C'est la prop 27 du chap 4)

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

(b) Supposons que $E = F \oplus G$. Alors $\begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \dim(F+G) = \dim E \\ \dim(F \cap G) = \dim(\{0_E\}) = 0 \end{cases}$

pas $\dim F + \dim G$! ça, on ne l'a pas montré

$\rightarrow$ Par (a) on a $\underbrace{\dim(F+G)}_{= \dim E} = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{= 0} = \dim F + \dim G$

2. Soient E_1, E_2 deux e.v. sur $\mathbb{R}$.

(a) Donner la définition d'une application linéaire $E_1 \to E_2$.

(b) Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Donner la définition de $\operatorname{Ker} f$.

2. (a) Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application. f est <u>linéaire</u> si

- $\underline{\forall u, v \in E_1}$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $\underline{\forall u \in E_1}$, $\forall \underline{\lambda} \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

<u>Rq</u> On peut aussi dire que f est linéaire ssi $\underline{\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}}$, $f(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$

(b) Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Le <u>noyau</u> de f, $\operatorname{Ker}(f)$ est défini par

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in E_1 , f(x) = 0_{\underline{E_2}} \}$$

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \underline{x - 2y - 2z = 0}\}$$
$$G = \mathrm{Vect}\,(v_1 = (1,2,-1), v_2 = (3,0,1), v_3 = (0,3,-2))$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. • Montrons que $0_{\mathbb{R}^3} \in F$. On a $0 - 2.0 - 2.0 = 0$ ✓

$\rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ vérifie l'équation de F

• Soient $u = (x,y,z) \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\underbrace{u + \lambda v}_{= (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')} \in F$
$v = (x', y', z') \in F$

On calcule :

$$(x+\lambda x') - 2(y+\lambda y') - 2(z+\lambda z') = x + \lambda x' - 2y - 2\lambda y' - 2z - 2\lambda z'$$
$$= \underbrace{(x - 2y - 2z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \lambda \underbrace{(x' - 2y' - 2z')}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0$$

$\rightarrow u + \lambda v$ vérifie l'équation de F.

Rq On peut aussi montrer que
Si $u \in F$, $v \in F$, $u + v \in F$
Si $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in F$
séparément.

⚠ • $\underbrace{u + \lambda v}_{\text{vecteur de } \mathbb{R}^3} \cancel{=} \underbrace{x + \lambda x' - 2(y + \lambda y') - 2(z + \lambda z')}_{\text{réel}}$

• $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \in F$ est faux
$\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset F$ OK (bizarre, mais ok)
$0_{\mathbb{R}^3} \in F$ OK

2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(u_1 = (2,1,0), u_2 = (2,0,1))$. En déduire une base de F et la dimension de F.

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in F \iff x - 2y - 2z = 0$

$\iff x = 2y + 2z,\ y, z \in \mathbb{R}$

$\iff u = (2y+2z, y, z),\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}$

$= y\underbrace{(2,1,0)}_{u_1} + z\underbrace{(2,0,1)}_{u_2}$

$\iff u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

Donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$

$\to \{u_1, u_2\}$ engendre F (famille génératrice de F)

et u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, donc $\{u_1, u_2\}$ est libre

$\to \{u_1, u_2\}$ est une base de F et $\boxed{\dim F = \mathrm{Card}(\{u_1, u_2\}) = 2}$

⚠ $F \neq x - 2y - 2z = 0$ (ensemble ; réel)

$F \neq y(2,1,0) + z(2,0,1)$ (ensemble ; vecteur)

Rq On peut aussi dire que

$u_1 \in F$: $2 - 2.1 - 2.0 = 0$

$u_2 \in F$: $2 - 2.0 - 2.1 = 0$

Donc F est un sev qui contient $\{u_1, u_2\}$

Or $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est le + petit sev qui contient $\{u_1, u_2\}$

$\to \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset F$

Or, $\{u_1, u_2\}$ est libre car u_1, u_2 non colinéaires $\to \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = 2$

et donc $2 \leq \dim F < 3$ ($F \subset \mathbb{R}^3$ et $F \neq \mathbb{R}^3$: $(1,0,0) \notin F$)

$\to \dim F = 2 = \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

$\to \boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)}$

$$G = \mathrm{Vect}\,(v_1 = (1,2,-1), v_2 = (3,0,1), v_3 = (0,3,-2))$$

3. Donner une base de G et la dimension de G.

⚠ génératrice, mais pas forcément une base

3. $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de G

→ Est-elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ $\iff \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \end{cases}$ → Il y a une infinité de solutions

Pour $\lambda_2 = 1$ on trouve $-3v_1 + v_2 + 2v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $v_2 = 3v_1 - 2v_3$

Vérification

$-3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

→ $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$

→ $\{v_1, v_3\}$ est une famille génératrice de G
libre car v_1, v_3 non colinéaires

$\{v_1, v_3\}$ base de G et $\boxed{\dim G = 2}$

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y - 2z = 0\}$
- $G = \text{Vect}\,(v_1 = (1,2,-1), v_2 = (3,0,1), v_3 = (0,3,-2))$
  $= \text{Vect}(v_1, v_3)$ par (3)

4. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

⚠ Si vous avez obtenu $\dim F + \dim G = 3$, ça ne suffit pas pour dire que F et G sont supplémentaires

4) Version courte On a obtenu $\dim F = 2$ en (2)
$\dim G = 2$ en (3)

et d'après la question de cours, si $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ alors $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$

Mais ici, $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim F + \dim G = 4$ donc (par contraposée)

F et G ne sont pas en somme directe.

Version longue $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
et $F + G = \mathbb{R}^3$

- Déterminons $F \cap G$ Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

si vous avez obtenu $\{v_1, v_2\}$ comme base de G mettez $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$: syst $\neq$ mais même résultat

$$u \in F \cap G \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ \exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ tq } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x = \lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - 2(2\lambda_1 + 3\lambda_2) - 2(-\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ x = \lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \overbrace{-\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0}^{\lambda_1 = -2\lambda_2} \\ x = \lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ z = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ x = -2\lambda_2 \\ y = -4\lambda_2 + 3\lambda_2 = -\lambda_2 \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u = (-2\lambda_2, -\lambda_2, 0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((-2,-1,0))$$

$$= \lambda_2(-2,-1,0)$$

$\rightarrow F \cap G = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-2,-1,0)}_{\neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc libre}}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ Donc F et G ne sont pas supplémentaires

Rq Par contre, on a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

$$= 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$\rightarrow F+G$ est un sev de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$. Donc $\underline{F+G = \mathbb{R}^3}$

5. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Bonus : En déduire (sans calcul !) que $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathrm{Vect}(v_3)$.

$$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

- Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

alors
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{1}{2}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

⚠ dim $\mathcal{B}$ n'existe pas !

$\longrightarrow$ $\mathcal{B}$ est libre

- Or, $\mathrm{Card}\, \mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

- <u>Sinon</u> (sans la dimension) on montre que $\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, montrons que $u\in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$

Or $u\in\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \iff$ il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tq $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 v_3 = u$

$$\iff \quad (S)\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = y \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = z \end{cases} \iff (S) \text{ a des solutions.}$$

$$\text{Or, } (S) \underset{L_1\leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = \frac{x}{2} \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = y \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = z \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = \frac{x}{2} \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = y-\frac{x}{2} \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = z \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = \frac{x}{2} \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = y-\frac{x}{2} \\ \lambda_3 = y+z-\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x}{2} - (2y+3z-x) = -\frac{x}{2}-2y-3z \\ \lambda_2 = 3(y+z-\frac{x}{2}) - y + \frac{x}{2} = 2y+3z-x \\ \lambda_3 = y+z-\frac{x}{2} \end{cases}$$

<u>Rq</u> $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sont les <u>coordonnées</u> de u dans la base $\mathcal{B}$.

$\longrightarrow$ Quel que soit $u\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tq $u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 v_3$

Donc $\mathcal{B}$ génératrice et Donc c'est une base.

<u>Bonus</u> $\mathcal{B}_F = \{u_1, u_2\}$ est une base de F par (2)

Posons $H = \text{Vect}(v_3)$ alors $\{v_3\}$ engendre H et $v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\{v_3\}$ est libre

$\rightarrow$ $\mathcal{B}_H = \{v_3\}$ est une base de H

et on a vu que $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_H = \{u_1, u_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus H = F \oplus \text{Vect}(v_3)$

6. Donner les coordonnées de v_1 dans la base $\mathcal{B}$.

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

→ On cherche l'unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tq $v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3/2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1/2 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3/2 \\ \lambda_3 = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1/2 - 0 = 1/2 \\ \lambda_2 = 3/2 - 3 \cdot 1/2 = 0 \\ \lambda_3 = 1/2 \end{cases}$$

→ Les coordonnées de v_1 dans $\mathcal{B}$ sont $(1/2, 0, 1/2)$

Vérification

$\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$ ✓

Rq Si on a montré en 5 que $\mathcal{B}$ est génératrice, on trouve, $\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, les coord de u dans la base $\mathcal{B}$ sont $\left(\frac{3x}{2} - 2y - 3z,\ 2y + 3z - x,\ y + z - \frac{x}{2} \right)$

Donc pour $v = (\underset{x}{1}, \underset{y}{2}, \underset{z}{-1})$ on a $\left(\frac{3}{2} - 4 + 3,\ 4 - 3 - 1,\ 2 - 1 - \frac{1}{2} \right) = (1/2, 0, 1/2)$ ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de E.

1. Montrer que la famille $\{\underbrace{f_1 + f_2 - f_3}_{u_1}, \underbrace{f_1 - f_2 + f_3}_{u_2}\}$ est libre. Est-ce une base de E ?

1) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, supposons que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_E$

alors $\lambda_1 (f_1 + f_2 - f_3) + \lambda_2 (f_1 - f_2 + f_3) = 0_E$

$\iff \underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}_{\alpha} f_1 + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\beta} f_2 + \underbrace{(-\lambda_1+\lambda_2)}_{\gamma} f_3 = 0_E$

Or $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E

donc c'est une famille libre :

si $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0_E$

alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$

donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ $\{u_1, u_2\}$ est libre

Mais $\operatorname{card}(\{u_1, u_2\}) = 2 \neq 3 = \dim E$

$\rightarrow$ Ce n'est pas une base de E.

(en fait, $\operatorname{Card}(\{u_1, u_2\}) < \dim E$ donc $\{u_1, u_2\}$ n'est pas génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de E.

2. Montrer que la famille $\{f_1, \underbrace{f_1 + f_2}_{v_1}, \underbrace{f_1 + f_2 + f_3}_{v_2}\}$ est libre. Est-ce une base de E ?

$\rightarrow$ Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tq $\mu_1 f_1 + \mu_2 v_1 + \mu_3 v_2 = 0_E$

alors $\mu_1 f_1 + \mu_2 (f_1 + f_2) + \mu_3 (f_1 + f_2 + f_3) = 0_E$

càd $(\mu_1 + \underbrace{\mu_2 + \mu_3}_{\alpha}) f_1 + (\underbrace{\mu_2 + \mu_3}_{\beta}) f_2 + \underbrace{\mu_3}_{\gamma} f_3 = 0_E$

Or $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre, donc on en déduit, comme en 1., que

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \{f_1, v_1, v_2\} \text{ est libre}$$

De plus, $\mathrm{Card}(\{f_1, v_1, v_2\}) = 3 = \dim E$, donc c'est une base de E