Matrices - Vocabulaire

Définition : Une *matrice* A de taille $n \times p$ est un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

i numérote les lignes
j ——— colonnes

Le **coefficient** sur la i-ème ligne et j-ème colonne est noté a_{ij}. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$. Si $n = p$, A est **carrée**. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Opérations sur les matrices : On peut sommer deux matrices de même taille :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On peut multiplier une matrice par un scalaire :

$$\lambda \in \mathbb{K}, A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ Ces opérations sont effectuées coefficient par coefficient.

Matrice nulle : On note $0_{n,p}$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Produits de matrices : On peut multiplier une matrice de taille $n \times p$ par une matrice de taille $p \times q$:

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$
$$AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$\rightsquigarrow$ On obtient une matrice de taille $n \times q$.

Propriétés

- $0_{qn} \cdot A = 0_{qp}, A \cdot 0_{pq} = 0_{nq}$.
- Associativité : $(AB)C = A(BC)$.
- Distributivité :

$$A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$$

⚠ Généralement $AB \neq BA$.
⚠ $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.
⚠ $AB = 0_{n,q} \not\Rightarrow A = 0_{n,p}$ ou $B = 0_{p,q}$.

Puissance d'une matrice carrée : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^p par récurrence :

$$A^0 = I_n, \; A^{k+1} = AA^k$$

Une matrice A est **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{n,n}$.

Matrice identité : On appelle **matrice identité de taille** n, notée I_n, la matrice carrée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On a, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A$ et $AI_p = A$

Inverse : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A^{-1} est l'**inverse** de A.

Propriétés :

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

Matrices particulières :

- On dit que A est *triangulaire supérieure* si tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls : $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- On dit que A est *triangulaire inférieure* si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls : $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- On dit que A est *diagonale* si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangulaire sup — Triangulaire inf — Diagonale

Transposée : La **transposée** de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, est définie par $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$.
$\rightsquigarrow$ les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A et vice-versa.

Propriétés :

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** si ${}^tA = A$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$

Trace : La **trace** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme des coefficients diagonaux de A

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriétés :

- $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \,\mathrm{Tr}(A)$
- $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.
- $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.