Inverse d'une matrice carrée

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = I_n$.
$B \in M_n(\mathbb{R})$

$\longrightarrow$ Montrons que $BA = I_n$ (i.e. $B = A^{-1}$)

On résoud l'équation $(*)$ $BX = y \cdot I_n$ où $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ les inconnues sont $x_{11}, x_{12} \cdots x_{1n}, x_{21} \cdots x_{nn}, y$: il y en a n^2+1

$\rightarrow$ l'équation $(*)$ équivaut à $BX - yI_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$: il y a n^2 équations

ex $(n=2)$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ $yI_2 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$BX - yI_n = 0_{M_n(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} - y & x_{12} + 2x_{22} \\ x_{11} - x_{21} & x_{12} - x_{22} - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} - y = 0 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{21} = 0 \\ x_{12} - x_{22} - y = 0 \end{cases}$$

→ Système homogène
à 5 inconnues
4 équations

Ainsi, $BX - y I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ est un système homogène à n^2 équations et n^2+1 inconnues.

→ Il a soit 1 solution $X = 0_{M_n(\mathbb{R})}$, $y = 0$, soit une infinité de solutions (s'il y a des inconnues libres)

→ Soit r le rang du système. Alors $r \leq n^2$ et

$$n^2 + 1 = \underbrace{r}_{\leq n^2} + \underbrace{\text{nb d'inconnues libres}}_{\text{donc } \geq 1}.$$

→ Il y a donc au moins une inconnue libre, donc il y a une infinité de solutions. En particulier il y a une solution $(X_1, y_1) \neq (0_{M_n(\mathbb{R})}, 0)$ (solution non nulle du système).

→ Montrons que $y_1 \neq 0$. Si $y_1 = 0$, on a $BX_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

donc $\underbrace{AB}_{I_n} X_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ donc $X_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$: contredit $(X_1, y_1) \neq (0_{M_n(\mathbb{R})}, 0)$

donc $y_1 \neq 0$

→ On a donc $B\left(\frac{1}{y_1} X_1\right) = I_n$. Montrons que $\frac{1}{y_1} X_1 = A$. On a

$\frac{1}{y_1} X_1 = I_n\left(\frac{1}{y_1} X_1\right) = A \underbrace{B\left(\frac{1}{y_1} X_1\right)}_{= I_n} = A I_n = A$. Donc $\boxed{BA = I_n}$