Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Définition : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux lois

1. une addition interne $+ : E \times E \to E$ qui vérifie
   - (A_1) $\forall (u, v, w) \in E^3,\ u + (v + w) = (u + v) + w$.
   - (A_2) il existe $0_E \in E$ t.q. $\forall u \in E,\ u + 0_E = u$. On appelle 0_E le *vecteur nul* de E.
   - (A_3) pour chaque $u \in E$ il existe un $(-u) \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$. On appelle $(-u)$ *l'opposé* de u.
   - (A_4) $\forall (u, v) \in E^2,\ u + v = v + u$.
2. une multiplication externe $\cdot : E \times \mathbb{K} \to E$ qui vérifie
   - (M_1) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$.
   - (M_2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$.
   - (M_3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
   - (M_4) $\forall (u, v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Les éléments de E sont appelées les *vecteurs*, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Soient $u_1, \ldots, u_p, v$ des vecteurs de E. On dit que v est *combinaison linéaire* de $u_1, \ldots, u_p$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.

Propriétés : Pour tous $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

1. $\lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0$ ou $u = 0_E)$
2. $(-1) \cdot u = -u$ (l'opposé de u)
3. Notons $u - v = u + (-v)$. Alors $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.

Exemples fondamentaux :

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel.
2. Pour tout n, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(0, \ldots, 0)$.
3. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme constant égal à 0.
4. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de tailles $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $n \times p$ à coefficients tous nuls.
5. Soit X un ensemble quelconque. Alors l'ensemble $\mathbb{K}^X$ des fonctions $X \to \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^X$ est la fonction constante nulle. En particulier, l'ensemble $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si

1. $F \neq \emptyset$.
2. Pour tous $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$.
3. Pour tout $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in F$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un s.e.v. de E
2. $F \subset E$ et F muni des même lois que E est un espace vectoriel
3. $F \neq \emptyset$ et pour tous $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

Propriétés : Soit F un s.e.v. de E. On a

- $0_E \in F$.
- Soient $u_1, \ldots, u_p$. Si v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, alors $v \in F$.

Méthode : Pour vérifier si un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel :

1. On regarde si $0_E \in F$. Si oui, on a bien $F \neq \emptyset$. Sinon, F n'est pas un sous-espace vectoriel.
2. On prend $u, v \in F$ quelconques et on vérifie que $u + v \in F$.
3. On prend $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et on vérifie que $\lambda u \in F$.

Remarque : On peut faire 2. et 3. d'un coup : on montre que pour tous $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

Méthode 2 : Pour montrer que $f \subset E$ n'est *pas* un s.e.v. de E, on peut :

1. Montrer que $0_E \notin F$
2. Trouver u, v dans F tels que $u + v \notin F$
3. Trouver $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda u \notin F$. Penser à essayer $\lambda < 0$.

Construction de s.e.v. : Soient F, G deux s.e.v. de E.

1. $F \cap G$ est un s.e.v. de E.
2. ⚠ $F \cup G$ n'est *pas* un s.e.v. de E, sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. $F + G = \{w \in E, w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G\}$ est un s.e.v. de E appelé *somme* de F et G. C'est le plus petit s.e.v. qui contient $F \cup G$.
4. Si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que E est *somme directe* de F et G et on note $E = F \oplus G$.

S.e.v engendré : Soient $u_1, \ldots, u_p \in E$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ est un s.e.v. de E, appelé *sous-espace engendré* par $u_1, \ldots, u_p$ et noté $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. C'est le plus petit s.e.v. qui contient tous les u_i. Plus généralement, si $A \subset E$, on note $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel contenant toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A.

Propriétés :

- Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
- Si F est un s.e.v. et $A \subset F$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
- $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Méthode : Considérons un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$ décrit par une équation, par exemple

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\}$$

Pour trouver une famille de vecteurs qui engendre F :

1. On prend $u \in F$ quelconque, et on utilise l'équation de F pour exprimer une (ou plusieurs) coordonnées de u en fonction des autres. Ici $u = (x, y, z) \in F \Rightarrow z = 2x + y$.
2. On a donc $u \in F \Rightarrow u = (x, y, 2x + y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$: on sépare "ce qui dépend" de chaque coordonnée restante. On écrit ainsi u comme combinaison linéaire (ici de $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 1)$)
3. Donc, si $u \in F$ alors $u \in \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$.
4. On montre que $(1, 0, 2) \in F$ et $(0, 1, 1) \in F$, d'où $\mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1)) \subset F$.
5. On a donc $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$.