Méthode - Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E

Pour montrer que $E = F \oplus G$:

Méthode 1 : On utilise la définition

1. On montre que $F \cap G = \{0_E\}$

⇝ Pour cela, on prend $x \in F \cap G$ et on montre que $x = 0_E$

2. On montre que $E = F + G$

⇝ Pour cela, on prend $u \in E$ un vecteur quelconque et on cherche $v \in F$ et $w \in G$ tels que $\boxed{u = v + w}$

Typiquement, les conditions $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \\ v + w = u \end{cases}$ donnent des conditions que v et w, s'ils existent, doivent vérifier. On vérifie ensuite que ces v et w vérifient bien les conditions.

Si E est de dimension finie, on a 2 autres méthodes

Méthode 2 : Avec des bases

1. On détermine une base $\mathcal{B}_F$ de F
2. On détermine une base $\mathcal{B}_G$ de G
3. On montre que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E

Méthode 3 Avec les dimensions

1. On montre que $F \cap G = \{0_E\}$
2. On montre que $\dim F + \dim G = \dim E$ (ce qui donne $F + G = E$)