Applications linéaires

Définitions : Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est *linéaire* si pour tous $u, v \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a
$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$
2. L'ensemble des applications linéaires $E \to F$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée *endomorphisme* de E.

Image et noyau : Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- On appelle *image* de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, l'espace vectoriel
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F,\ \exists u \in E \text{ tq } v = f(u)\} \subset F$$
La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$.
- On appelle *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, l'espace vectoriel
$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\} \subset E$$

Propriétés : On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Théorème du rang : $\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$
- f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.
- f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.
- Si $\dim F = \dim E$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

Matrice d'une application linéaire : On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Alors si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut associer à f une matrice de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie comme suit :

- Pour $j = 1, \ldots, n$, on calcule $f(e_j) \in F$.
- On écrit les coordonnées $(a_{1j}, \ldots, a_{pj})$ de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.
- Alors la j-ème colonne de la matrice A est le vecteur-colonne $[f(e_1)]_{\mathcal{B}'} = {}^t \begin{pmatrix} a_{1j} & \ldots & a_{pj} \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} [f(e_1)]_{\mathcal{B}'} & \ldots & [f(e_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans le cas d'un endomorphisme, on choisit généralement la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

Changement de base : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E, et f un endomorphisme. La *matrice de passage* P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont la j-ème colonne est le vecteur-colonne des coordonnées du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
Remarque : P est donc la matrice de l'application id_E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Soit alors $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme; notons A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Alors
$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Application : Base de diagonalisation Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Supposons que f soit diagonalisable : il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de f. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a donc $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont donc $(0, \ldots, 0, \lambda_i, \ldots, 0)$, avec λ_i en i-ème position. Donc la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Et alors ? La matrice A de l'endormorphisme f est donc beaucoup plus "simple" dans la base $\mathcal{B}$ que dans la base canonique. C'est particulièrement utile pour calculer les puissances successives de A. Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, alors $A = PDP^{-1}$. Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{p \text{ fois}} = PD^pP^{-1},$$

et $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$ est très simple à calculer.

Matrice, image et noyau : Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}_0$, alors $v \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi

$$A[v]_{\mathcal{B}_0} = 0,$$

où $[v]_{\mathcal{B}_0}$ est le vecteur des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_0$. En notant ces coordonnées $(x_1 \ldots, x_n)$, on se ramène donc à un système linéaire.

De même, $v \in \mathrm{Im}(f)$ si, et seulement si, il existe $(x_1, \ldots x_n)$ tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}_0}.$$

On se ramène, là aussi, à un système linéaire.