Déterminants

Déterminant d'une matrice 2×2 : $\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$

Déterminants de matrices $n \times n$: Pour calculer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on se ramène à des déterminants plus petits en développant le long d'une ligne ou d'une colonne. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note A_{ij} la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant de A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

La formule de développement par rapport à la i-ème ligne $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ est alors :

$$\boxed{\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

La formule de développement par rapport à la j-ème colonne est :

$$\boxed{\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

Stratégie : il s'agit donc de développer par rapport à la ligne/colonne qui a le plus de zéros !
Exemple : Ici, par exemple, la troisième ligne est assez avantageuse :

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 18$$

Opérations élémentaires et déterminant : Si on obtient $\tilde{A}$ à partir de A par :

- $L_i \leftrightarrow L_j$, ou $C_i \leftrightarrow C_j$ alors $\det \tilde{A} = -\det A$
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ alors $\det \tilde{A} = \det A$
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$, ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$ alors $\det \tilde{A} = \alpha \det A$

Stratégie : on utilise les opérations sur les lignes et les colonnes (notamment la deuxième) pour faire apparaître le plus de zéros possibles sur une ligne ou une colonne donnée, et on développe par rapport à celle-ci.
Exemple : Reprenons le déterminant précédent. On ne change pas la valeur du déterminant en faisant $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3$:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -8 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 18$$

Multi-linéarité : Le déterminant de A est linéaire par rapport à chacune des lignes, et chacune des colonnes :

$$\det(C_1, \dots, C_j + C'_j \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j, \dots C_n) + \det(C_1, \dots, C'_j, \dots C_n),$$
$$\det(C_1, \dots, \lambda C_j \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_j, \dots C_n)$$

et de même pour les lignes.

Autres propriétés : Le déterminant vérifie :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$. En particulier, si P est inversible, $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$
- Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det({}^tA) = \det A$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ ⚠On a donc $\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mais $\det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda^2 \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Cas des matrices triangulaires :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$