Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 1

Durée : 1h.
Explicitez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.
Bon courage !

Exercice 1

Montrer que le système suivant a des solutions non nulles si, et seulement si, $\alpha = -3$ ou $\alpha = 3$. Donner alors l'ensemble des solutions.

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -(2+\alpha)x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & (1-\alpha)y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & (2+\alpha)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2

On note

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

Exercice 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Donner la transposée ${}^tA$ de A. Que peut-on dire de A ?

(b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.

(c) Calculer PD et AP, et en déduire que $PDP^{-1} = A$.
Bonus : Comment peut-on en déduire une formule donnant A^n pour $n \in \mathbb{N}$?

(d) Posons

$$E_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 3X\}, \quad E_{-3} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = -3X\}$$

Montrer que E_3 et E_{-3} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(e) Donner $E_3 \cap E_{-3}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?