Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 2 - Sujet A - Groupes TD3, TD5, TD8, et TD7

Durée : 1h.

Explicitez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.

Bon courage !

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ une famille à $n-1$ vecteurs. Que peut-on dire de cette famille ?

(Il n'est pas demandé de justifier ce résultat).

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de E.

1. Montrer que la famille $\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}$ n'est pas libre. Justifier qu'elle n'est pas non plus génératrice de E.
2. Donner une base de $F = \mathrm{Vect}(f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3)$.
3. En déduire $\dim F$.

Exercice 2

On note F le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0, y = x + z\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F. En déduire $\dim F$.
3. Démontrer (sans calcul !) que toute famille libre de F est aussi génératrice.

Exercice 3

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y + 2z, x - y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Calculer $\mathrm{rg}(f)$. En déduire que f est surjective.