Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 2 - Corrigé A - Groupes TD3, TD5, TD8, et TD7

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ une famille à $n-1$ vecteurs. Que peut-on dire de cette famille ?

Corrigé :

D'après un résultat du cours, toute famille génératrice $\mathscr{F}$ de E vérifie $\mathrm{card}(\mathscr{F}) \geq \dim E$.

Par contraposée, ici, puisque $\mathrm{card}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}) = n - 1 < \dim E$,*la famille* $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ *n'est pas génératrice.*

En particulier, ce n'est pas une base de E.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de E.

1. Montrer que la famille $\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}$ n'est pas libre. Justifier qu'elle n'est pas non plus génératrice de E.
2. Donner une base de $F = \mathrm{Vect}(f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3)$.
3. En déduire $\dim F$.

Corrigé :

1. Montrons que la famille $\{v_1 = f_1 + 2f_2 - f_3, v_2 = f_3 - f_2, v_3 = f_1 + f_3\}$ est liée. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1(f_1 + 2f_2 - f_3) + \lambda_2(f_3 - f_2) + \lambda_3(f_1 + f_3) = 0_E$$

alors on a

$$(\lambda_1 + \lambda_3)f_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2)f_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)f_3 = 0_E \tag{1}$$

Puisque (f_1, f_2, f_3) est une base de E, c'est une famille libre, donc (1) implique

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 & = -\lambda_1 \\ \lambda_2 & = 2\lambda_1 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions : tous les triplets $(\lambda_1, 2\lambda_1, -\lambda_1)$ pour λ_1 scalaire. En particulier, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ est une solution non nulle :

$$(f_1 + 2f_2 - f_3) + 2(f_3 - f_2) - (f_1 + f_3) = 0_E$$

donc la famille $\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}$ est liée.

Si $\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}$ était génératrice, comme

$$\mathrm{card}(\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}) = 3 = \dim E,$$

ce serait une base de E. En particulier, ce serait une famille libre, ce qui contredit le résultat qu'on vient d'obtenir. Donc $(f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3)$ n'est pas une base de E.

2. Par définition du sous-espace vectoriel engendré, la famille $\{f_1 + 2f_2 - f_3, f_3 - f_2, f_1 + f_3\}$ est génératrice de F. Cependant, comme on l'a vu en 1., ce n'est pas une famille libre, donc ce n'est pas une base de F.

   D'après (1), on a $v_1 + 2v_2 v_3 = 0_E$ donc $v_3 = v_1 + 2v_2$ est combinaison linéaire de v_1 et v_2. Donc $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, autrement dit la famille $\{v_1, v_2\}$ est génératrice de F.

   Montrons que c'est une famille libre. Soient λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_E$. Alors on a

   $$\lambda_1(f_1 + 2f_2 - f_3) + \lambda_2(f_3 - f_2) = 0_E \text{ donc } \lambda_1 f_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2) f_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2) f_3 = 0_E$$

   d'où, puisque (f_1, f_2, f_3) est libre,

   $$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

   et la famille (v_1, v_2) est libre. Donc c'est une base de F.

3. On a donc $\dim F = \mathrm{card}(\{v_1, v_2\}) = 2$.

Exercice 2

On note F le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0, y = x + z\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F. En déduire $\dim F$.
3. Démontrer (sans calcul !) que toute famille libre de F est aussi génératrice.

Corrigé :

1. Montrons que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
   - $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ vérifie les deux équations de F, donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
   - Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \in F$. On a d'une part

     $$(x + \lambda x') - (y + \lambda y') + 2(z + \lambda z') = \underbrace{(x - y + 2z)}_{\substack{=0 \\ \text{car } u \in F}} + \lambda \underbrace{(x' - y' + 2z')}_{\substack{=0 \\ \text{car } v \in F}} = 0$$

     et d'autre part

     $$y + \lambda y' = \underbrace{(x + z)}_{\substack{=y \\ \text{car } u \in F}} + \lambda \underbrace{(x' + z')}_{\substack{=y' \\ \text{car } v \in F}} = (x + \lambda x') + (z + \lambda z')$$

     donc $u + \lambda v$ vérifie bien les équations de F.

   $\rightsquigarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminons une base de F. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff u = (x, x, 0), x \in \mathbb{R} \iff u = x(1, 1, 0), x \in \mathbb{R} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}((1, 1, 0)) \end{aligned}$$

donc $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$, et $\{(1, 1, 0)\}$ est une famille génératrice de F. Puisque $(1, 1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est une famille libre, donc une base de F.

On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 1}$.

3. Soit $\mathscr{A} \subset F$ une famille libre de F. Alors $\mathrm{card}(\mathscr{A}) \leq \dim F = 1$ donc $\mathrm{card}(\mathscr{A}) = 0 ou 1$. On en déduit que $\mathscr{A} = \{u\}$, et comme par hypothèse $\mathscr{A}$ est libre, $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{A}) = \mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de F, qui est lui-même de dimension 1 : donc $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{A}$ est donc génératrice de F.

Exercice 3

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y + 2z, x - y + z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Calculer $\mathrm{rg}(f)$. En déduire que f est surjective.

Corrigé :

1. Montrons que f est linéaire. Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = ((x + \lambda x') - (y + \lambda y') + 2(z + \lambda z'), (x + \lambda x') - (y + \lambda y') + (z + \lambda z')) \\ &= ((x - y + 2z) + \lambda(x' - y' + 2z'), (x - y + z) + \lambda(x' - y' + z')) \\ &= (x - y + 2z, x - 3z) + \lambda(x' - y' + 2z', x' - y' + z') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. Déterminons une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $u = x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y = x + z \end{cases}$$

Autrement dit $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0, y = x + z\} = F$, où F est le s.e.v. de l'exercice 2. En utilisant le résultat de cet exercice, on trouve donc que $(1, 1, 0)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0)) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f n'est pas injective.

3. Par le théorème du rang, on a

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f), \text{ i.e. } 3 = 1 + \mathrm{rg}(f),$$

donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

Or, $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, autrement dit, f est surjective.