Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 2 - Sujet B - Groupes TD1, TD2, TD4 et TD6

Durée : 1h.

Explicitez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.

Bon courage !

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ une famille à $n+1$ vecteurs. Que peut-on dire de cette famille ?

(Il n'est pas demandé de démontrer ce résultat.)

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres ? Lesquelles sont des bases de E ?

1. $\{2e_1, e_2 + e_3\}$
2. $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$

Exercice 2

On note F et G les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = z\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 3z\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de G. En déduire $\dim G$.
3. Donner une base de $F \cap G$. En déduire $\dim(F \cap G)$.

Exercice 3

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 2y - z, x - 3z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Calculer $\mathrm{rg}(f)$. En déduire que f est surjective.