Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2020-2021

Contrôle continu 2 - Sujet B - Corrigé

Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ une famille à $n+1$ vecteurs. Que peut-on dire de cette famille ?

Corrigé :

D'après un résultat du cours, toute famille libre $\mathscr{F}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leq \dim E$. Par contraposée, ici, puisque $\mathrm{Card}(\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}) = n+1 > \dim E$,*la famille* $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ *est liée.*

En particulier, ce n'est pas une base de E.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres ? Lesquelles sont des bases de E ?

1. $\{2e_1, e_2 + e_3\}$
2. $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$

Corrigé :

1. Vérifions si $\{2e_1, e_2 + e_3\}$ est libre. Notons $v_1 = 2e_1, v_2 = e_2 + e_3$; soient λ_1, λ_2 scalaires tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_E$. On a alors

$$2\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_2 e_3 = 0_E. \tag{1}$$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de E, c'est une famille libre, donc (1) implique

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Donc la famille $\{v_1, v_2\} = \{2e_1, e_2 + e_3\}$ est libre.

En revanche, puisque $\mathrm{Card}(\{2e_1, e_2 + e_3\}) = 2 < \dim E$, ce n'est pas une base de E.

On peut aussi vérifier que ce n'est pas une famille génératrice. En effet, soit $u \in E$. Cherchons λ_1, λ_2 tels que

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 2\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_2 e_3$$

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe un unique triplet de scalaires (x_1, x_2, x_3) tels que $u = x_1 e_1 + x_2 + e_2 + x_3 e_3$. On a donc

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_2 \\ \lambda_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x_1}{2} \\ \lambda_2 = x_2 \\ 0 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

Ce système, d'inconnues λ_1, λ_2 a des solutions seulement si $x_2 = x_3$. Donc, si $x_2 \neq x_3$, le vecteur $uu = x_1 e_1 + x_2 + e_2 + x_3 e_3$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. Par exemple, pour $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$, on obtient que $e_3 \notin \mathrm{Vect}(2e_1, e_2 + e_3)$.

Donc $\{2e_1, e_2 + e_3\}$ n'est pas génératrice, et ce n'est pas une base de E.

2. Vérifions si $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$ est libre. Notons $u_1 = e_1 - e_2, u_2 = e_2 - e_3, u_3 = e_3 - e_1$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$. Alors on a

$$\lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_2 - \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_3 - \lambda_3 e_1 = 0_E,$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda_3)e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)e_3 = 0_E.$$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de E, c'est une famille libre, donc (1) implique

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions : tous les triplets $(\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3)$ pour un scalaire λ_3 quelconque. Pour $\lambda_3 = 1$ on obtient

$$u_1 + u_2 + u_3 = e_1 - e_2 + e_2 - e_3 + e_3 - e_1 = 0_E$$

donc la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas libre.

En particulier, ce n'est pas une base de E (même si $\mathrm{Card}(\{u_1, u_2, u_3\} = 3 = \dim E\,!)$.

Exercice 2

On note F et G les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = z\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 3z\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de G. En déduire $\dim G$.
3. Donner une base de $F \cap G$. En déduire $\dim(F \cap G)$.

Corrigé :

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ vérifie l'équation de F, donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
   - Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \in F$. On a

     $$(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') = \underbrace{x + 2y}_{\substack{=z \\ \text{car } u \in F}} + \lambda(\underbrace{x' + 2y'}_{\substack{=z' \\ \text{car } v \in F}}) = z + \lambda z'$$

     donc $u + \lambda v \in F$.

   $\rightsquigarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ vérifie l'équation de G, donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
   - Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \in F$. On a

     $$x + \lambda x' = 3z + \lambda(3z') = 3(z + \lambda z')$$

     donc $u + \lambda v \in G$.

$\rightsquigarrow$ G est un ous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminons une base de G. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in G &\iff x = 3z \\ &\iff u = (3z, y, z), y, z \in \mathbb{R} \\ &\iff u = z(3,0,1) + y(0,1,0), y, z \in \mathbb{R} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}((3,0,1),(0,1,0)) \end{aligned}$$

   donc $G = \mathrm{Vect}((3,0,1),(0,1,0))$, et $\{(3,0,1),(0,1,0)\}$ est une famille génératrice de G.

   Vérifions si c'est une famille libre : soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(3,0,1) + \lambda_2(0,1,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors on a

$$\begin{cases} 3\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases} \text{ donc } \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

   donc $((3,0,1),(0,1,0))$ est une famille libre, et donc une base de G.

   On en déduit que $\boxed{\dim G = 2}$.

3. Déterminons une base de $F \cap G$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\iff \begin{cases} x + 2y = z \\ x = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = z - x \\ x = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = 3z \end{cases} \\ &\iff u = (3z, -z, z), z \in \mathbb{R} \iff u = z(3,-1,1), z \in \mathbb{R} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}((3,-1,1)) \end{aligned}$$

   donc $F \cap G = \mathrm{Vect}((3,-1,1))$, et $\{(3,-1,1)\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$. Puisque $(3-1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est une famille libre, donc une base de $F \cap G$.

   On en déduit que $\boxed{\dim(F \cap G) = 1}$.

Exercice 3

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 2y - z, x - 3z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?
3. Calculer $\mathrm{rg}(f)$. En déduire que f est surjective.

Corrigé :

1. Montrons que f est linéaire. Soient $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = ((x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z'), (x + \lambda x') - 3(z + \lambda z')) \\ &= ((x + 2y - z) + \lambda(x' + 2y' - z'), (x - 3z) + \lambda(x' - 3z')) \\ &= (x + 2y - z, x - 3z) + \lambda(x' + 2y' - z', x' - 3z') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

   Donc f est linéaire.

2. Déterminons une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Soit $u = x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x + 2y - z & = 0 \\ x - 3z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = z \\ x = 3z \end{cases}$$

Autrement dit $\operatorname{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = z, x = 3z\} = F \cap G$, où F et G sont les deux s.e.v. de l'exercice 2. En utilisant le résultat de cet exercice, on trouve donc que $(3, -1, 1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((3, -1, 1)) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f n'est pas injective.

3. Par le théorème du rang, on a

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f), \text{ i.e. } 3 = 1 + \operatorname{rg}(f),$$

donc $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 2}$.

Or, $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$, donc $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, autrement dit, f est surjective.