Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2019-2020

CC1

Durée : 1h

Question de cours

Donner la définition d'une matrice inversible.
Calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En fonction des valeurs de α, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Calculer BA, CB et CBA.
2. Calculer A^2, puis $A^2 + A$.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Supposons pour commencer que $A^3 = 0$. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2)$.
2. En déduire que $I_n - A$ est inversible. Quel est son inverse ?
3. On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Montrer que

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n$$

Indication : Penser à utiliser la distributivité.