Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire **CC1**
Année 2019-2020 *Corrigé*

Question de cours

A quelle condition une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ?
Dans ce cas, quel est son inverse ?

Corrigé : Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 1
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En fonction des valeurs de α, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{cases}$$

Corrigé : Via l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z &= 0 \\ (1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z &= 1 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z &= 0 \\ (2-\alpha-\alpha^2)z &= 1 - \alpha \end{cases}$$

Les solutions du système vont donc dépendre des racines du polynôme $2 - \alpha - \alpha^2$. On trouve que le discriminant est 9, d'où $2 - \alpha - \alpha^2 = -(\alpha - 1)(\alpha + 2)$. Donc

- Si $\alpha = 1$, le système équivaut à $x + y + z = 1$, autrement dit, en prenant y et z comme paramètres, $x = 1 - y - z$. Il y a donc une infinité de solutions données par

$$\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $\alpha = -2$, le système équivaut à

$$\begin{cases} x \quad + y \quad + \alpha z &= 1 \\ (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z &= 0 \\ 0 &= 3 \end{cases}$$

  La dernière ligne est une contradiction : le système n'admet donc aucune solution dans ce cas.

- Si $\alpha \neq 1, -2$, le système équivaut à

$$\begin{cases} x \quad + y \quad + \alpha z &= 1 \\ (\alpha - 1)y + (1-\alpha)z &= 0 \\ (\alpha+2)z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ y - z &= 0 \\ z &= \frac{1}{\alpha+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{\alpha+2} \\ y &= \frac{1}{\alpha+2} \\ z &= \frac{1}{\alpha+2} \end{cases}$$

  et il y a donc une unique solution.

Exercice 2
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

1. Calculer BA, AC et BAC.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Calculer $A^3 - 4I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Corrigé

1. $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $BAC = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$
2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
3. On a donc $A^3 - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A$, d'où $A^3 - A = 4I_3$. Donc $\frac{1}{4}A(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3$ donc A est inversible d'inverse
$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Soient D et $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

1. Pour $n = 4$, calculer DD'.
2. Toujours pour $n = 4$, en déduire D^p pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Qu'obtient-on pour n quelconque ?

Corrigé

1. Pour $n = 4$, on a
$$DD' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\mu_4 \end{pmatrix}.$$
2. Montrons pas récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^p \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $p = 0$, on a bien $D^0 = I_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^0 \end{pmatrix}$.

   Hérédité : Supposons la proposition vraie au rang p et montrons-la au rang $p+1$. On a
$$D^{p+1} = D^pD = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{p+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{p+1} \end{pmatrix}$$

3. On considère maintenant des matrices diagonales D, D' de taille $n \times n$. On a alors :

- Le coefficient en position (i, j) de DD' est donné par

$$(DD')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} D'_{kj}$$

Or $D_{ik} = 0$ sauf si $k = i$, auquel cas $D_{ii} = \lambda_i$. De même, $D'_{kj} = 0$ sauf si $k = j$, et alors $D'_{jj} = \mu_j$. Donc $(DD')_{ij} = 0$ sauf si $i = j$ et $(DD')_{ii} = \lambda_i \mu_i$. On a donc

$$DD' = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

- Montrons par récurrence sur p que $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $p = 0$, on a bien $D^0 = I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^0 \end{pmatrix}$.

Supposons la propriété démontrée au rang p et montrons-la au rang $p+1$. On a $D^{p+1} = D^p \cdot D$, or, par hypothèse de récurrence, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$. En utilisant la question 1, on a donc

$$D^{p+1} = D^p \cdot D = \begin{pmatrix} \lambda_1^p\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{p+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{p+1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{p+1} \end{pmatrix}$$

ce qu'il fallait démontrer.