Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre Linéaire 1

Epreuve de première session - 4 Mai 2022

Durée : 2h.
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Exercice 1 1. Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{B}_1 = (v_1 = (-1,0,3), v_2 = (-2,1,0), v_3 = (-1,1,-5))$$

2. On considère les sous-espaces vectoriels suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \mathrm{Vect}(v_1 = (-1,0,3), v_2 = (-2,1,0), w = (0,1,-6))$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=0, x-4y-z=0\}$$

(a) Déterminer une base et la dimension de F_1 et F_2.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

3. Montrer que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\mathscr{B}'_1 = \Big(Q_1(X) = 3X^2 - 1, Q_2(X) = X - 2, Q_3(X) = -5X^2 + X - 1\Big)$$

4. On considère les sous-ensembles suivants dans $\mathbb{R}_2[X]$:

$$G_1 = \mathrm{Vect}(Q_1(X) = 3X^2 - 1, Q_2(X) = X - 2)$$
$$G_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) + P'(0) = 0, P(1) = 2P(0) - 3P'(0)\}$$

(a) Montrer que G_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis que $G_2 = \mathrm{Vect}(Q_3)$.
(b) En déduire que $\mathbb{R}_2[X] = G_1 \oplus G_2$.

Exercice 2 On considère l'application

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (4x + 10y + z, -y, -15x - 30y - 4z) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$. Est-ce que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0$.
4. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
5. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de l'exercice 1.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soient H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim H_1 = \dim H_2 = n-1$ et $H_1 \neq H_2$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $v \in H_2 \setminus H_1$. Montrer que $E = H_1 \oplus \mathrm{Vect}(v)$.
2. Montrer que $E = H_1 + H_2$. En déduire $\dim(H_1 \cap H_2)$.
3. Soient deux applications linéaires $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ de rang 1.
   On suppose qu'il existe $v \in E$ tel que $f_1(v) = 0$ et $f(v) = 2$.
   Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2))$.