Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre Linéaire 1

Epreuve de seconde session - 27 juin 2022

Durée : 2h.
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Exercice 1 On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y - 3x + 4z = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}(u_1 = (0,1,1), u_2 = (2,3,2))$$

1. Déterminer une équation de G.
2. Donner une base et la dimension de F, G et $F \cap G$.
3. Calculer la dimension de $F + G$. En déduire qui est $F + G$.
4. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} ax + (bx+1)y + z \\ x + ay + z \\ x + y + (a+b)z + b^2 - b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que f est linéaire ssi $b = 0$.

   On suppose maintenant $b = 0$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer, en fonction de a, $\dim \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
4. Pour quelles valeurs de a, f est-elle un isomorphisme ?

   On suppose maintenant $a = 1$
5. Donner la matrice de f dans la base

$$\mathscr{B}_1 = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,-1))$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(v_1) = 3^n v_1$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire.

1. Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors f est surjective.
2. On suppose f surjective. Donner $\dim \mathrm{Ker}(f)$.
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire de dimension 1.
3. On note $\mathscr{B}_0 = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
   Déduire de la question précédente qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   avec $\alpha \neq 0$.