Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2021-2022
Algèbre Linéaire 1

Epreuve de seconde session 2022 - Corrigé

Durée : 2h.
Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
La précision de l'argumentation sera une part importante dans l'évaluation : Justifiez toutes les réponses.
Montrez-moi ce que vous savez faire !

Exercice 1 ((/7pts)) On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y - 3x + 4z = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}(u_1 = (0,1,1), u_2 = (2,3,2))$$

1. **(/2 pts)** Déterminer une équation de G.

Corrigé : Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $v \in G$ ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha u_1 + \beta u_2$, ce qui revient à dire qu'il existe (α, β) solution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & 2\beta & = & x \\ \alpha & + & 3\beta & = & y \\ \alpha & + & 2\beta & = & z \end{array}\right. \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & 2\beta & = & z \\ \alpha & + & 3\beta & = & y \\ & & 2\beta & = & x \end{array}\right.$$
$$\underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & 2\beta & = & y \\ & & \beta & = & y - z \\ & & 2\beta & = & x \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & 2\beta & = & y \\ & & \beta & = & y - z \\ & & 0 & = & x - 2y + 2z \end{array}\right.$$

$\rightsquigarrow$ Ce système a des solutions ssi $x - 2y + 2z = 0$. On en déduit que

$$\boxed{G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 2z = 0\}}$$

Une remarque : Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\det(v, u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 1 & 3 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 1 & 3 \\ z - y & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ z - y & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)x - 2(z - y) = -(x - 2y + 2z)$$

Est-ce une coïncidence ?

Attention : Le fait que $G = \mathrm{Vect}(u_1 = (0,1,1), u_2 = (2,3,2))$ n'implique pas que

$$y + z = 0, \; 2x + 3y + 2z = 0$$

(ou tout autre variation du genre $(y + z) + (2x + 3y + 2z) = 0$) est une équation de G ! D'ailleurs, u_1 et u_2 ne vérifient aucune de ces équations.

2. **(/3 pts)** Donner une base et la dimension de F, G et $F \cap G$.

Corrigé :

- **Base et dimension de F :** Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} v \in F &\iff y - 3x + 4z = 0 \iff y = 3x - 4z \\ &\iff v = (x, 3x - 4z, z) = x(1, 3, 0) + z(0, -4, 1) \\ &\iff v \in \mathrm{Vect}((1, 3, 0), (0, -4, 1)) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\{v_1 = (1, 3, 0), v_2 = (0, -4, 1)\}$ est une famille génératrice de F.
De plus, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc c'est une famille libre.
$\rightsquigarrow$ (v_1, v_2) est une base de F, et $\boxed{\dim F = 2}$.

- **Base et dimension de G :** $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de G.
De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc c'est une famille libre.
$\rightsquigarrow$ (u_1, u_2) est une base de G, et $\boxed{\dim G = 2}$.

- **Base et dimension de $F \cap G$:** Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Méthode 1 : Avec les équations On a :

$$\begin{aligned} v \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - 2y + 2z &= 0 \\ -3x + y + 4z &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \to L_2 + 3L_1}{\iff} \begin{cases} x - 2y + 2z &= 0 \\ -5y + 10z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y - 2z = 2z \\ y = 2z \end{cases} \iff v = (2z, 2z, z) = z(2, 2, 1) \\ &\iff v \in \mathrm{Vect}((2, 2, 1)) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\{(2, 2, 1)\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$.
De plus, ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre.
$\rightsquigarrow$ $((2, 2, 1))$ est une base de $F \cap G$, et $\boxed{\dim F \cap G = 1}$.

Méthode 2 : Avec les bases. On a $v \in F \cap G$ ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ d'une part, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ d'autre part, tels que

$$\begin{aligned} \begin{cases} v = \alpha u_1 + \beta u_2 \\ v = \lambda v_1 + \mu v_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2\beta = \lambda &= x \\ \alpha + 3\beta = 3\lambda - 4\mu &= y \\ \alpha + 2\beta = \mu &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta - \mu = 0 \\ \alpha + 3\beta - 3\lambda + 4\mu = 0 \\ 2\beta - \lambda = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha + 2\beta - \mu = 0 \\ \beta - 3\lambda + 5\mu = 0 \\ 2\beta - \lambda = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \alpha + 2\beta - \mu = 0 \\ \beta - 3\lambda + 5\mu = 0 \\ 5\lambda - 10\mu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= -\mu \\ \beta &= \mu \\ \lambda &= 2\mu \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $v = -\mu u_1 + \mu u_2 = \mu(u_2 - u_1) = \mu(2,2,1) \in \mathrm{Vect}((2,2,1))$.
(On a aussi $v = 2\mu v_1 + \mu v_2 = \mu(2v_1 + v_2) = \mu(2,2,1)$)
$\rightsquigarrow$ $\{(2,2,1)\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$.
De plus, ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre.
$\rightsquigarrow$ $((2,2,1))$ est une base de $F \cap G$, et $\boxed{\dim F \cap G = 1}$.

Méthode 3 : Pourquoi pas les deux ? On a $v \in F \cap G$ ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \alpha u_1 + \beta u_2 & = v \\ -3x + y + 4x & = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2\beta, \; y = \alpha + 3\beta, \; z = \alpha + 2\beta \\ -3x + y + 4x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2\beta, \; y = \alpha + 3\beta, \; z = \alpha + 2\beta \\ -3(2\beta) + (\alpha + 3\beta) + 4(\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2\beta, \; y = \alpha + 3\beta, \; z = \alpha + 2\beta \\ 5\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

donc on a $\alpha = -\beta$ i.e. $v = \beta(u_2 - u_1) = \beta(2,2,1) \in \mathrm{Vect}(2,2,1)$.

$\rightsquigarrow$ $\{(2,2,1)\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$.
De plus, ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre.
$\rightsquigarrow$ $((2,2,1))$ est une base de $F \cap G$, et $\boxed{\dim F \cap G = 1}$.

Attention : Comme pour la question 1, mais à l'envers : le fait que l'équation de F est $y - 3x + 4z = 0$ ne nous dit pas que $(-3,1,4)$ est une base de F. D'ailleurs, ce vecteur n'est pas dans F !

Il y a bien un lien entre le vecteur (a,b,c) et le plan d'équation $ax + by + cz = 0$, mais cela implique les notions d'*orthogonalité* et de *produit scalaire*, que vous verrez l'an prochain.

En résumé (pour ceux qui ont vu au lycée le produit scalaire dans l'espace !), l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs dont le produit scalaire avec (a,b,c) fait 0 : donc c'est l'ensemble des vecteurs *perpendiculaires* à (a,b,c), tandis que $\mathrm{Vect}((a,b,c))$ est l'ensemble des vecteurs qui ont la *même direction* que (a,b,c).

3. **(/1 pts)** Calculer la dimension de $F + G$. En déduire $F + G$.

   Corrigé : On a donc

   $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$$

   Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$.
   Donc $\boxed{F + G = \mathbb{R}^3}$.

4. **(/1 pts)** F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

   Corrigé : On a obtenu que $F + G = \mathbb{R}^3$, mais $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$,
   donc *F et G ne sont pas supplémentaires.*

Exercice 2 ((/9 pts)) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} ax + (bx+1)y + z \\ x + ay + z \\ x + y + (a+b)z + b^2 - b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1. **(/2 pts)** Montrer que f est linéaire ssi $b = 0$.

   Corrigé : On procède par double implication.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est linéaire, et montrons qu'alors $b = 0$.
   Puisque f est linéaire, on a $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or, $f(0,0,0) = (0,0,b^2 - b)$ donc on doit avoir $b^2 - b = 0$, ce qui donne $b = 0$ ou $b = 1$.
   Or, si $b = 1$, on a

   $$f(x,y,z) = (ax + bxy + y + z, x + ay + z, x + y + (a+b)z)$$

   donc

   $$2f(1,1,0) = 2(a+b+1, 1+a, 2) = (2a+2b+2, 2a+2, 4) \text{ et } f(2,2,0) = (2a+4b+2, 2a+2, 4)$$

   Or comme f est linéaire, on doit avoir $2f(1,1,0) = f(2,2,0)$, donc $2a + 2b + 2 = 2a + 4b + 2$ ce qui donne $b = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $b = 0$ et montrons que f est linéaire. Soient $u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$. On calcule

   $$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (a(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z'), (x + \lambda x') + a(y + \lambda y') + (z + \lambda z'), \\ &\quad (x + \lambda x') + (y + \lambda y') + a(z + \lambda z')) \\ &= (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az) + \lambda(ax' + y' + z', x' + ay' + z', x' + y' + az') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

   donc f est bien linéaire.

   Attention : Il ne suffit pas de montrer que si $b = 0$ alors f est linéaire ! Pour montrer "ssi", il faut aussi montrer le "seulement si" : autrement dit, que si $b \neq 0$ alors f n'est pas linéaire.

   On suppose maintenant $b = 0$.

2. **(/1.5 pt)** Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Corrigé : On note $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on calcule

   $$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (a,1,1) \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,a,1) \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (1,1,a) \end{aligned}\right\} \quad [f]_{\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

3. **(/3 pt)** Déterminer, en fonction de a, $\dim \operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.

   Corrigé :

- **Dimension de $\operatorname{Ker}(f)$:** Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} ax + y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + az &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \\ ax + y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + az & = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z & = 0 \\ (1-a)y + (1-a^2)z & = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + az & = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z & = 0 \\ (2-a-a^2)z & = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + az & = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z & = 0 \\ (1-a)(2+a)z & = 0 \end{cases}$$

On sépare donc plusieurs cas :
$\boxed{a = 1}$ Dans ce cas,

$$v \in Ker(f) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x = -y - z \iff v = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$. Ces deux vecteurs forment une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, et comme ils sont non colinéaires, c'est une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a donc dans ce cas $\boxed{\dim Ker(f) = 2}$.

$\boxed{a = -2}$ Dans ce cas,

$$v \in Ker(f) \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = z \\ y & = z \end{cases} x = -y - z \iff v = z(1,1,1)$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Ce vecteur forme une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, et comme il est non nul, c'est une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a donc dans ce cas $\boxed{\dim Ker(f) = 1}$.

$\boxed{a \neq 1, -2}$ Dans ce cas,

$$v \in Ker(f) \iff \begin{cases} x + y + az & = 0 \\ (a-1)y + (1-a)z & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \iff v = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\boxed{\dim Ker(f) = 0}$.

- **Calcul de** $\mathrm{rg}(f)$ **:** Par le théorème du rang, on a $= \mathrm{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(f)$ donc
  - si $a = 1$, $\mathrm{rg}(f) = 3 - 2 = 1$
  - si $a = -2$, $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$
  - si $a \neq 1, -2$, $\mathrm{rg}(f) = 3 - 0 = 3$.

4. **(/1.5 pt)** Pour quelles valeurs de a, f est-elle un isomorphisme ?

   Corrigé : f est un isomorphisme ssi f est injective et surjective, ce qui équivaut à

   $$\dim \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \text{ et } \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 3$$

et on a vu que c'était le cas si, et seulement si, $\boxed{a \neq 1 \text{ et } a \neq -2}$.

On suppose maintenant $a = 1$

5. **(/1.5 pt)** Donner la matrice de f dans la base

$$\mathscr{B}_1 = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,-1))$$

Corrigé : On calcule

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= f(1,1,1) = (3,3,3) = 3v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) &= f(1,0,-1) = (0,0,0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) &= f(0,1,-1) = (0,0,0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{donc } [f]_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **(/1.5 pt)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(v_1) = 3^n v_1$.

Corrigé : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} [f^n(v_1)]_{\mathscr{B}_1} &= [f]^n_{\mathscr{B}_1} [v_1]_{\mathscr{B}_1} \\ &= \begin{pmatrix} ^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 3^n [v_1]_{\mathscr{B}_1} = [3^n v_1]_{\mathscr{B}_1} \end{aligned}$$

donc on a bien $f^n(v_1) = 3^n v_1$.

Exercice 3 ((/4 pts)) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire.

1. **(/1.5 pts)** Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors f est surjective.

Corrigé : $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim \mathbb{R} = 1$. Il y a donc deux possibilités :

- Soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$; mais alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, autrement dit pour tout $x \in E, f(x) = 0$. Donc, dans ce cas, f est la fonction nulle.
- Soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$; mais alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, autrement dit f est surjective.

2. **(/1.5 pts)** On suppose f surjective. Donner $\dim \mathrm{Ker}(f)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire de dimension 1.

Corrigé : Si f est surjective, alors par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \mathrm{rg}(f) = n - 1$$

donc il existe une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(f)$ à $n-1$ éléments.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe $u \neq 0_E$ tel que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, u)$ est une base de E.
Mais dans ce cas, si on pose $F = \mathrm{Vect}(u)$, alors F est un s.ev. de dimension 1 de E, et, puisque l'union de la base $\{u\}$ de F et de la base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ de $\mathrm{Ker}(f)$ est une base de E, F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. **(/1 pts)** On note $\mathscr{B}_0 = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.
Déduire de la question précédente qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$.

Corrigé : Calculons la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, u)$ de la question précédente. Alors

$$\begin{aligned} e_1, e_2, ..., e_n \in \mathrm{Ker}(f) \text{ donc } f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_{n-1}) = 0 \\ u \notin \mathrm{Ker}(f) \text{ donc } f(u) \neq 0 \end{aligned}$$

Alors, si on note $\alpha = f(u)$, la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_0$ est bien

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$