**Université Paris 1**
**L1 MIASHS**
**Algèbre linéaire**
**Année 2019-2020**

**Epreuve à distance du 15 mai 2020**

*Durée : 2h. Documents autorisés.*

*Explicitez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.*

*Bon courage !*

**Exercice 1** *(4 pts)*

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (t^2-4t)e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tous réels $t, s$, $R(t)R(s) = R(t+s)$. Calculer $R(0)$.
2. Montrer (sans calcul !) que $R(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donner $R(t)^{-1}$.

**Exercice 2** *(11 pts)*

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on considère le système

$$(S) \begin{cases} x - y + 2z = a \\ mx + (1-m)y + 2(m-1)z = b \\ 2x + my - (3m+1)z = c \end{cases}$$

1. On suppose $m = -1$. Montrer que $(S)$ admet des solutions ssi $c = 3a + b$.
2. On suppose que $m = -1$ et que $c = 3a + b$. Montrer qu'il y a une infinité de solutions et en donner une.
3. On suppose que $m \neq -1$. Montrer que $(S)$ admet une unique solution.
4. On considère la matrice
$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$$
Déterminer pour quelles valeurs de $m$ $A(m)$ est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 3** *(5 pts)*

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

1. Soit $F = \{M_{a,b},\ a, b \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
**(Bonus)** Donner une famille génératrice de $F$.
2. Soit $G = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.
**(Bonus)** Donner dim $G$.