Université Paris 1
L1 MIASHS
Algèbre linéaire
Année 2019-2020

Examen de seconde session

Durée : 2h. Documents autorisés.
Explicitez les étapes du raisonnement et des calculs, même s'ils n'ont pas abouti.
Bon courage !

Exercice 1 (10 points)

1) (Cas $n = 4$) On considère la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^2 et $(I_4 - A)A$.

(b) En déduire que les matrices A et $I_4 - A$ ne sont pas inversibles.

(c) Déterminer l'ensemble K des vecteurs-colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $(I_4 - A)X = 0_{\mathbb{R}^4}$.

(d) Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(Bonus) Comment appelle-t-on cet ensemble ?

2) (Cas général) Soit $n \geq 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = A$. On suppose que $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

(a) Montrer que $I_n - A$ n'est pas inversible.

(b) Démontrer que pour tous réels r et s, la matrice $(I_n + rA)(I_n + sA)$ est une combinaison linéaire de I_n et A.

(c) En déduire que si $r \neq -1$, la matrice $I_n + rA$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 2 (4 points)

Soient a, b deux réels. On considère le système :

$$(S)\begin{cases} x + y + az & = 3 \\ x + y + 2az & = 4 \\ x + by + z & = 3 \end{cases}$$

Donner, selon les valeurs de a et b, l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 3 (6 points)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \text{Vect}((0, -1, 1), (2, 1, -1), (1, 1, -1))$$
$$G = \text{Vect}((1, 3, 0), (2, 4, -2), (-1, -2, 1))$$

(a) Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$.

(b) Montrer que $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3, z = y - 3x\}$.

(c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

(d) *(Bonus)* La famille $((0, -1, 1), (2, 1, -1), (1, 1, -1))$ est-elle libre ?
Quelle est la dimension de F ?