Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L1 MIASHS 2023-2024
Algèbre linéaire 1

TD2 : Matrices

Opérations sur les matrices

Exercice 1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -5 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Effectuer toutes les sommes et produits possibles avec ces matrices.

Puissances de matrices carrées

Exercice 2 On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^2 et J^3 et en déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

   Indication : On pourra écrire A comme somme de deux matrices qui commutent et utiliser la formule démontrée à l'exercice 8.

Exercice 3 On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
3. *Application :* On considère les suites données par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

   Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Inverses de matrices

Exercice 4 Calculer, par la méthode de Gauss, l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Pour $\alpha \neq 0$, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha-2 \\ 2 & 2\alpha+1 & 2\alpha-4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = I_3 + 3A$. En déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

Exercice 7 Mettre les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ -x & & & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & a \\ 2x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

En déduire leur ensemble de solutions.
Indication : Utiliser l'exercice 4

Exercices complémentaires

Exercice 8 ($\star$) On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et on suppose que $AB = BA$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exercice 9 Soient A et B deux matrices carrées telles que $A + B = AB$.

1. Montrer que $(A - I_n)$ est inversible et que $(A - I_n)^{-1} = B - I_n$.
2. Montrer que A et B commutent.
   Indication : Montrer qu'il existe une matrice inversible M telle que $A = I_n + M$ et $B = I_n + M^{-1}$.

Exercice 10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n.
Indication : S'inspirer de l'exercice 2

Exercice 11 ($\star$) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2. Pour $n \geq 2$, trouver le reste $R_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. *Indication :* $R_n(X)$ est un polynôme de degré 1 : $R_n(X) = a_n X + b_n$. Il s'agit donc de déterminer, pour chaque $n \geq 2$, les réels a_n et b_n. Utiliser pour cela les racines de $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$.

Exercice 12 On considère les matrices

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A\,{}^t\!A$ et ${}^t\!A\,A$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Même question pour B.

Remarque : Les matrices inversibles dont l'inverse est égale à la transposée sont dites *orthogonales.*

Exercice 13 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mettre le système suivant sous forme matricielle :

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \alpha y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha-2)z & = & 2 \\ 2x & + & (2\alpha-1)y & + & (2\alpha-4)z & = & 3 \end{array}\right.$$

Pour $\alpha \neq 0$, en déduire l'ensemble des solutions de (S_α).
Indication : Voir exercice 5.