

TD4 : FAMILLES LIBRES ET GÉNÉRATRICES, BASES

Familles libres et génératrices dans un e.v.

Exercice 1 On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 2, 1)$. Les familles suivantes sont-elles libres ? Génératrices ?

$$\begin{array}{ll} \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, & \{u_3, 2u_3 - u_4, u_4\}, \\ \{u_1, u_2, u_3\}, & \{u_1, u_4\} \end{array}$$

Exercice 2 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre. Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\begin{array}{ll} \{e_1, 2e_2, e_3\}, & \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}, \\ \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}, & \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\} \end{array}$$

Exercice 3 Soit E un e.v. de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .
Donner les coordonnées de $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 4 A quelle condition sur les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la famille de vecteurs suivante est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

$$\mathcal{F} = \{(1, 1, 1), (0, a, 1), (0, 0, b)\}.$$

Base d'un sous-espace vectoriel

Exercice 5 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on considère les sous espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$$

où $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (4, 2, -1)$.

1. Donner une base de F . En déduire $\dim F$.
2. Donner une base de G . En déduire $\dim G$.
3. Donner une base de $F \cap G$. En déduire $\dim(F \cap G)$, puis $\dim(F + G)$.

Exercice 6 Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

$$F = \{(2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}, G = \{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 7 Pour chacun des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ci-dessous, donner une base, la dimension, et déterminer un supplémentaire.

- $F_1 = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0, x + y - z = 0\}$.

Indication : Utiliser le théorème de la base incomplète.

Exercices complémentaires

Exercice 8 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le \mathbb{R} - espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit

$$F = \{P \in E \mid X^2 P'' - 2P = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminer une base de F .
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 9 A quelle condition sur les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ la famille de vecteurs suivante est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

$$\mathcal{F} = \{(a, a, b), (a, b, a), (b, a, a)\}$$

Indication : Voir exercice 4.

Exercice 10 Donner une base, la dimension, et déterminer un supplémentaire du s.e.v. suivant :

$$F = \text{Vect}(u, v, w) \text{ où } u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1), w = (1, 1, 1)$$

Indication : Voir exercice 7.

Exercice 11 (*) Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. On définit les polynômes suivant dans $\mathbb{R}^2[X]$:

$$\phi_1(X) = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \quad \phi_2(X) = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \quad \phi_3(X) = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

1. Calculer $\phi_i(a_j)$ pour $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
2. Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est génératrice. Pourquoi est-ce une base de $\mathbb{R}^2[X]$?
3. Calculer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans cette base.

Exercice 12 (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels distincts. tel que $a \neq b$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left((X - a)^k \right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $(X - b)^n$ dans la base \mathcal{B} .

$$\text{Indication} : (X - b)^n = ((X - a) + (a - b))^n.$$

Exercice 13 (*) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{x \mapsto \sin(kx), k = 1, \dots, n\}$ est libre.

Exercice 14 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. Soit F l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que $P \in F$ si et seulement si $(X - 1)^2$ divise P .
3. Donner une base de F et déterminer sa dimension.

Exercice 15 (*) On considère E le \mathbb{R} - espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - 2u_{n-1}$.
3. Exprimer pour tout $n \geq 1$, v_n en fonction de n, u_0 et u_1 .
4. En déduire qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de F telles que

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

5. Montrer que $\{(a_n)_n, (b_n)_n\}$ est une famille libre.
6. En déduire la dimension de F .