

TD6 : REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Représentations matricielles : exemples

Exercice 1 On note Φ_A l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer n, p tels que $\Phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
2. Donner, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, l'expression de $\Phi_A(u)$.
3. Donner la matrice de Φ_A dans la base canonique.
4. Déterminer $\text{Ker } \Phi_A$ et $\text{Im } \Phi_A$.

Exercice 2 On note $\Phi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Phi_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ les applications linéaires associées aux matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi_B \circ \Phi_A(u)$.

Exercice 3 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 . Que peut-on déduire pour f ?
2. Déterminer une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$. Montrer que la réunion \mathcal{B}' de ces deux bases est une base de E .
3. Quelle est la matrice de f dans \mathcal{B}' ?

Exercice 4 On considère les applications linéaires suivantes :

$$f : P \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$$
$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - 2y, 2x - y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_1[X]$ et de \mathbb{R}^2 .
2. Donner la matrice de g dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
3. Calculer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de \mathbb{R}^2 de deux manières différentes.
4. Montrer que $g \circ f$ est un isomorphisme.

Matrices de passage et changement de base

Exercice 5 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de E . Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1 = v + w, e_2 = w + u, e_3 = u + v)$ est encore une base de E . Donner la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que \mathcal{B}' est une base.
2. Déterminer la matrice de f dans \mathcal{B}' .
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans \mathcal{B} .

Exercice 7 Soit f l'application de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base suivante de \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}.$$

3. Donner la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Donner la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 8 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ la famille définie par $u = e_1 + e_2 - e_3$, $v = e_1 - e_3$ et $w = e_1 - e_2$.

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E et donner la matrice M de f dans \mathcal{B}' .
2. Exprimer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et calculer P^{-1} .
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Donner une expression de $f(x, y, z)$ et déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 10 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans \mathcal{B} est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ et montrer qu'ils sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. Donner une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$. Soit \mathcal{B}' la réunion de ces deux bases. Ecrire la matrice de f dans \mathcal{B}' .
3. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 11 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 On considère, dans $M_n(\mathbb{R})$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n .
2. En déduire A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère $\mathbb{R}^3[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. Donner la matrice de l'endomorphisme $d : P \mapsto P'$ dans la base \mathcal{B} .
2. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3[X] \\ P &\mapsto P(X+a) \end{aligned}$$

est linéaire. Donner la matrice M_a de T_a dans la base \mathcal{B} .

3. Déterminer $T_a \circ T_b$. En déduire $M_a M_b$.
4. Montrer de deux manières différentes que $d \circ T_a = T_a \circ d$.

Exercice 14 On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$L(aX^2 + bX + c) = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c \\ 3a + b + 2c \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de L dans les bases canoniques $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que $\mathcal{B}'_0 = (1 + X, X + X^2, 1 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}'_0 .
3. Montrer que $\mathcal{B}'_1 = ((1, 2), (2, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 . Donner la matrice de passage de \mathcal{B}'_1 à \mathcal{B}_1 .
4. Donner la matrice de L dans les bases \mathcal{B}'_0 et \mathcal{B}'_1 .