**Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne**
**L3 MIASHS 2022-2023**
**Compléments de calcul intégral et différentiel**

# Examen de première session - 16 mai 2023

*Durée : 2h.*
*Les exercices sont indépendants, et pevent être traités dans n'importe quel ordre.*
*Le barème est* indicatif.
*Montrez-moi ce que vous savez faire !*

## Partie 1 : Calcul différentiel

**Exercice 1 (/7 points))** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme notée $\|.\|$, et on s'intéresse à l'application

$$f : \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$$
$$A \mapsto (\mathrm{Tr}(A)+1)\cdot A + I_n$$

1. [**/1 pt**] Justifier qu'il existe $c>0$ tq, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{Tr}(M)| \leq c\|M\|$.
2. [**/2 pts**] Montrer que $f$ différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle.
3. [**/2 pts**] Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;
$$\|(Df(A)-Df(B))(H)\| \leq (|\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)| + c\|A-B\|)\|H\|$$
En déduire que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. [**/2 pts**] Montrer qu'il existe un voisinage $U$ de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ tel que $f_{|U} : U \to f(U)$ est un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme. Donner la différentielle de $f_{|U}^{-1}$ en $I_n$.

**Exercice 2 (/7 points))** Sur $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+x+y^2+2z^2 = 1\}$$

1. [**/1 pt**] Montrer que $\mathcal{A}$ est borné.
2. [**/6 pt**] Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{A}$ les plus proches et les plus distants de l'origine.
*Indication calculatoire :* $\frac{3}{8} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

## Partie 2 : Calcul intégral

**Exercice 3 (/7 points))**

1. [**/1.5 pt**] Donner, en le justifiant, un exemple de fonction appartenant à $\mathscr{L}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1) \setminus \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$, où $\lambda_1$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. [**/1 pt**] Donner, en le justifiant, un exemple de fonction appartenant $\mathscr{L}^{\pi}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où $\mu$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
3. [**/1.5 pt**]Déterminer l'ensemble $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$, où $\delta_0$ est la mesure de Dirac en 0.
4. [**/2 pts**] Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.
Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. On fixe une fonction $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$.
Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $fg \in \mathscr{L}^r(\mu)$.
*Indication :* Inégalité de Hölder.
5. [**/1 pt**] Montrer que l'application
$$f \in (L^p(\mu), \|.\|_p) \mapsto fg \in (L^r(\mu), \|.\|_r)$$
est continue et donner un majorant de sa norme d'application linéaire.