Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments de calcul intégral et différentiel

Corrigé de l'examen du 16 mai 2023

Partie 1 : Calcul différentiel

Exercice 1 (/7 points)) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme notée $\|.\|$, et on s'intéresse à l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(R) &\to \mathcal{M}_n(R) \\ A &\mapsto (\mathrm{Tr}(A)+1)\cdot A + I_n \end{aligned}$$

1. **[/1 pt] Justifier qu'il existe $c > 0$ tq, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{Tr}(M)| \leq c\|M\|$.**

   Corrigé : L'application
   $$t : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(M)$$
   est linéaire, définie sur l'e.v.n. de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc c'est une application linéaire continue. Il existe donc $c > 0$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$|\operatorname{Tr}(M)| = |t(M)| \leq c\|M\|.$$

2. **[/2 pts] Montrer que f différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa différentielle.**

   Corrigé : Soient $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule
   $$\begin{aligned} f(A+H) &= (\mathrm{Tr}(A+H)+1)(A+H) + I_n \\ &= (\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} H + 1)(A+H) + I_n \text{ car } \operatorname{Tr} \text{ est } \mathbb{C}^1 \\ &= \underbrace{(\operatorname{Tr} A + 1)A + I_n}_{=f(A)} + \underbrace{\mathrm{Tr}(H)A + (\mathrm{Tr}(A)+1)H}_{:=L(H)} + \underbrace{\mathrm{Tr}(H)H}_{:=R(H)} \\ &= f(A) + L(H) + R(H) \end{aligned}$$
   avec
   $$L : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(H)A + (\mathrm{Tr}(A)+1)H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ R(H) = \mathrm{Tr}(H)H$$
   $\rightsquigarrow$ L est linéaire, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc continue : $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
   $\rightsquigarrow$ D'après (1.), R vérifie
   $$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} = \frac{|\operatorname{Tr}(H)|\,\|H\|}{\|H\|} = |\operatorname{Tr}(H)| \leq c\|H\| \xrightarrow[H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}]{} 0$$
   Donc f est différentiable en A et, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   $$Df(A)(H) = \mathrm{Tr}(H)A + (\mathrm{Tr}(A)+1)H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

3. **[/2 pts] Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;**
   $$\|(Df(A) - Df(B))(H)\| \leq (|\operatorname{Tr}(A) - \operatorname{Tr}(B)| + c\|A-B\|)\|H\|$$
   En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule

$$\begin{aligned}
\|(Df(A) - Df(B))(H)\| &= \|Df(A)(H) - Df(B)(H)\| \\
&= \|(\mathrm{Tr}(H)A + (\mathrm{Tr}(A)+1)H) - (\mathrm{Tr}(H)B + (\mathrm{Tr}(B)+1)H)\| \\
&= \|\mathrm{Tr}(H)(A-B) + (\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B))H\| \\
&\leq |\mathrm{Tr}(H)|\|A-B\| + |\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)|\|H\| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq (c\|A-B\| + |\mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(B)|)\|H\| \text{ par 1.} \\
&\leq (c\|A-B\| + |\mathrm{Tr}(A-B)|)\|H\| \text{ par linéarité de } \mathrm{Tr} \\
&\leq (c\|A-B\| + c\|A-B\|)\|H\| \text{ par 1.} \\
&\leq 2c\|A-B\|\|H\| \text{ par 1.}
\end{aligned}$$

Par définition de la norme d'applications linéaires $\|.\|_{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on en déduit, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|Df(A) - Df(B)\|_{\mathcal{L}} \leq 2c\|A-B\|$$

donc l'application

$$Df : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Df(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

est lipschitzienne, donc continue. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. **[/2 pts] Montrer qu'il existe un voisinage U de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ tel que $f_{|U} : U \to f(U)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Donner la différentielle de $f_{|U}^{-1}$ en I_n.**

   Corrigé : D'après les questions 2. et 3. on a

   - $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, donc c'est un espace de Banach ;
   - f est $\mathcal{C}^1$ en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$;
   - La différentielle de f en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est

     $$Df(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(H) = \mathrm{Tr}(H)0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + (\mathrm{Tr}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) + 1)H = H,$$

     autrement dit, $Df(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
     $\rightsquigarrow Df(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On peut donc appliquer le Théorème d'Inversion Locale à f en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$: il existe un voisinage U de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ tel que $f_{|U} : U \to f(U)$ est un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme, exactement comme souhaité.
   De plus, remarquons que $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = I_n$, donc $f_{|U}^{-1}$ est définie et C^1 en I_n, et on a

   $$Df_{|U}^{-1}(I_n) = Df(f_{|U}^{-1}(I_n))^{-1} = Df(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})^{-1} = (Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})^{-1} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (/7 points)) Sur $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$, on considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + x + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

1. **[/1 pt] Montrer que $\mathcal{A}$ est borné.**

   Corrigé : Soit $u = (x,y,z) \in \mathcal{A}$. On a :

   $$1 = x^2 + x + y^2 + 2z^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 + 2z^2$$

   donc

   $$\left\|(x,y,z) - \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)\right\| = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{5}{4}$$

   donc

   $$\mathcal{A} \subset B\left(\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

   donc $\mathcal{A}$ est borné.

2. **[/6 pt] Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{A}$ les plus proches et les plus distants de l'origine.**

Corrigé : Posons

$$g : u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + x + y^2 + 2z^2 - 1$$
$$f : u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$\rightsquigarrow$ f est donc le carré de la distance à l'origine, et donc (par croissance de la fonction carré) le(s) point(s) de $\mathcal{A}$ les plus proches et les plus distants de l'origine correspondent aux extrema globaux de f sur $\mathcal{A} = g^{-1}(\{0\})$.

Tout d'abord, g est un polynôme sur $\mathbb{R}^3$, donc c'est une application continue. Par conséquent, $\mathcal{A} = g^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par une application continue, et c'est donc un fermé. Par ailleurs, d'après 1., $\mathcal{A}$ est borné.

$\rightsquigarrow$ Puisque $\dim \mathbb{R}^3 < \infty$, on en déduit que $\mathcal{A}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

Or, f est également un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}^3$. Par le théorème de Weierstrass, f est donc bornée sur le compact $\mathcal{A}$ et atteint ses bornes : autrement dit les extrema globaux existent.

On va les trouver à l'aide du Théorème des Extrema Liés. En effet, f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et on a, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla f(u) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g(u) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}$$

Donc $\nabla g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ssi $y = z = 0, 2x + 1 = 0$, autrement dit $u = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$. Mais $(-\frac{1}{2}, 0, 0) \notin \mathcal{A}$, donc, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $\nabla g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

D'après le TEL, du coup, si $u = (x, y, z)$ est un extremum local de $f_{|\mathcal{A}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$, i.e.

$$\begin{cases} 2x & = 2\lambda x + \lambda \\ 2y & = 2\lambda y \\ 2z & = 4\lambda z \\ x^2 & + x + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2\lambda x + \lambda & (L_1) \\ (1-\lambda)y = 0 & (L_2) \\ (1-2\lambda)z = 0 & (L_3) \\ x^2 + x + y^2 + 2z^2 = 1 & (L_4) \end{cases}$$

D'après (L_2) et (L_3), on a plusieurs cas à distinguer :

- *Cas 1 :* Si $\lambda = 1$, alors par (L_3) , $z = 0$ et par (L_1), $2x = 2x + 1$, ce qui est impossible.
  $\rightsquigarrow$ Ce cas est excluse.
- *Cas 2 :* Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors par (L_2), $y = 0$ et par (L_1), $x = \frac{1}{2}$. Enfin, par (L_4),on a alors

  $$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

  Ce qui nous donne deux points candidats :

  $$u_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \text{ et } u_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$$

- *Cas 3 :* Sî $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$ alors $y = z = 0$ par (L_2) et (L_3) et par (L_4),

  $$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

  Ce qui nous donne deux autres points candidats :

  $$u_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, 0\right) \text{ et } u_4 = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0, 0\right)$$

On calcule :

$$f(u_1) = f(u_2) = \frac{3}{8} < f(u_3) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < f(u_4) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

donc u_1, u_2 sont les minima globaux de f sur $\mathcal{A}$ (donc les points de $\mathcal{A}$ les plus proches de l'origine) et u_4 est le maximum global (et donc le point de $\mathcal{A}$ de plus loin de l'origine).

Partie 2 : Calcul intégral

Exercice 3 (/7 points))

1. **[/1.5 pt] Donner, en le justifiant, un exemple de fonction appartenant à $\mathscr{L}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1) \setminus \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.**

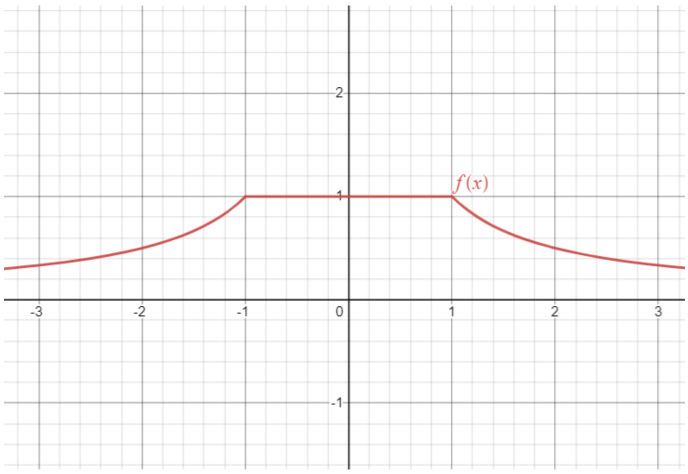
   Corrigé : On cherche donc une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (et pas juste $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}^+$!) qui vérifie

   - D'une part, $f \in \mathscr{L}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$, c'est à dire f borélienne et $\int_{\mathbb{R}}^* |f|^{\frac{3}{2}} \, d\lambda_1 < \infty$;
   - D'autre part, $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$, c'est à dire, puisque f est mesurable, $\int_{\mathbb{R}}^* |f| \, d\lambda_1 = \infty$.

   On pourrait envisager des fonctions du type $\frac{1}{x^\alpha}$: la convergence des intégrales correspondantes dépend de α, donc ça a des chances de marcher. Deux problèmes : elles ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$, et même si on arrive à se débarasser de 0, l'intégrale d'une fonction de ce type sur $\mathbb{R}$ tout entier ne converge *jamais*, quel que soit α : soit ça marche en $+\infty$, soit ça marche en 0, mais pas les deux.

   Essayons de contourner ces deux ennuis : après quelques tatônnements et dessins au brouillon, considérons la fonction définie que $\mathbb{R}$ par

   $$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{|x|} \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus]-1,1[} + \mathbb{1}_{[-1,1]} = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } |x| \geq 1 \\ 1 \text{ si } |x| \leq 1 \end{cases}$$

   Alors

   - f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc borélienne, et aussi localement Riemann-intégrable ;
   - D'après le lien entre les intégrales généralisées et les intégrales par rapport à la mesure de Lebesgue,
     $$\int_{\mathbb{R}}^* |f|^{\frac{3}{2}} \, d\lambda_1 < \infty \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{3}{2}} dx \text{ converge} \tag{1}$$
     Or, comme f est paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{3}{2}} dx$ converge ssi $\int_0^{+\infty} |f(x)|^{\frac{3}{2}} dx$ converge. Et ça tombe bien, d'après le critère de convergence sur les intégrales de Riemann,
     $$\int_0^{+\infty} |f(x)|^{\frac{3}{2}} dx = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx < \infty$$
     donc $f \in \mathscr{L}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$.
   - En revanche, toujours grâce à Riemann,
     $$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$
     donc, par le même raisonnement, $f \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$

2. **[/1 pt] Donner, en le justifiant, un exemple de fonction appartenant $\mathscr{L}^\pi(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.**

   Corrigé : On cherche donc une fonction g définie sur $\mathbb{N}$ (et pas sur $\mathbb{R}$, ce coup-ci) qui vérifie

   - g mesurable $((\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$;
     $\rightsquigarrow$ Ce premier point ne va pas nous empêcher de dormir : pour n'importe quelle fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et pour tout borélien $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a $g^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N}, g(n) \in B\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc en fait *toutes* les fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sont mesurables $((\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
     Mais il faut le mentionner !
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} |g|^\pi \, d\mu < \infty$.

   Or, on a vu que, si $g \in \mathscr{L}^0((\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})), \mathbb{R})$,

   $$\int_{\mathbb{N}}^* |g|^\pi \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} |g(n)|^\pi$$

   et une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est une suite, donc en fait, on cherche une suite qui, à la puissance π, est le terme général d'une série convergente.

   On peut considérer $g : n \in \mathbb{N} \mapsto \dfrac{1}{n+1}$: on a alors bien, par le critère...de Riemann, encore lui, sur les séries,

   $$\int_{\mathbb{N}} |g|^\pi \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} |g(n)|^\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\pi} < \infty$$

   puisque, comme $\pi > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)^\pi} \sim_\infty \dfrac{1}{n^\pi}$ converge.

   Remarque : Comme je l'ai constaté dans vos copies, si on n'est pas joueur, on peut prendre $g(n) = 0$. En effet. Je n'y avais pas pensé.

3. **[/1.5 pt] Déterminer l'ensemble $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.**

   Corrigé : On cherche l'ensemble des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui vérifient

   $$\int_{\mathbb{R}}^* |f|^p \, d\delta_0 < \infty$$

   Or, pour toute fonction borélienne f, $\int_{\mathbb{R}}^* |f|^p \, d\delta_0 = |f(0)|^p$. Du coup, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$ ssi $|f(0)| < \infty$; mais ça, c'est vrai pour toute fonction mesurable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$! Donc

   $$\boxed{\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \delta_0) = \mathscr{L}^0(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))}$$

4. **[/2 pts] Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. On fixe une fonction $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $fg \in \mathscr{L}^r(\mu)$.**

   Corrigé : Soit donc $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Remarquons que, puisque $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, on a

   $$1 = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}}$$

   avec, du coup, $\dfrac{r}{p} \leq 1$ donc $\dfrac{p}{r} \geq 1$, et de même $\dfrac{p}{q} \geq 1$.

   $\rightsquigarrow$ On va utiliser l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\dfrac{p}{r}$ et $\dfrac{q}{r}$. On a en effet

- $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ donc
$$\int_X^* |g^r|^{\frac{q}{r}}\, d\mu = \int_X^* |g|^q\, d\mu < \infty$$
donc $g^r \in \mathscr{L}^{\frac{q}{r}}(\mu)$.
- De même, $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ donc
$$\int_X^* |f^r|^{\frac{p}{r}}\, d\mu = \int_X^* |f|^p\, d\mu < \infty$$
donc $f^r \in \mathscr{L}^{\frac{p}{r}}(\mu)$.

Du coup, par l'inégalité de Hölder, $f^r g^r \in \mathscr{L}^1$, ce qui donne
$$\int_X |fg|^r\, d\mu = \int_X |f^r g^r|\, d\mu < \infty$$
autrement dit $fg \in \mathscr{L}^r(X, \mathscr{T}, \mu)$, comme on souhaitait.

Remarque : L'idée ici était de remontrer l'inégalité de Hölder généralisée, pas de simplement l'utiliser !

5. **[/1 pt] Montrer que l'application**
$$L : f \in (L^p(\mu), \|.\|_p) \mapsto fg \in (L^r(\mu), \|.\|_r)$$
est continue et donner un majorant de sa norme d'application linéaire.

Corrigé : D'après la question précédente, si $f \in L^p(\mu)$, alors on a bien $fg \in L^r(\mu)$. Le passage des $\mathscr{L}^p$ aux L^p ne pose pas de problème : si $f = \tilde{f}$ μ-p.p, alors $fg = \tilde{f}g$ μ-p.p. Donc l'application L est bien définie. Et il est à peu près clair que L est linéaire : si $f_1, f_2 \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R}$, alors comme $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel, $f_1 + \lambda f_2 \in L^p(\mu)$ et
$$L(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)g = f_1 g + \lambda f_2 g = L(f_1) + \lambda L(f_2).$$
De plus, l'inégalité de Hölder nous donne aussi, pour tout $f \in L^p(\mu)$,
$$\begin{aligned}\|fg\|_r^r &= \int_X |fg|^r\, d\mu = \int_X |f^r g^r|\, d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f^r|^{\frac{p}{r}}\, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X |g^r|^{\frac{q}{r}}\, d\mu\right)^{\frac{r}{q}} \\ &= \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{r}{q}} \\ &= \|f\|_p^r \|g\|_q^r\end{aligned}$$
autrement dit , pour tout $f \in L^p(\mu)$
$$\|L(f)\|_r = \|fg\|_r \leq \|g\|_q \|f\|_p$$
donc la norme d'application linéaire de L vérifie $\boxed{\|L\|_{\mathcal{L}(L^p(\mu), L^r(\mu))} \leq \|g\|_q}$.