Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments d'analyse

Exercices de révision : Rappels de calcul différentiel

1 Rappels de calcul différentiel

Exercice 1 E, F deux e.v.n. Dans chacun des cas suivants, montrer que f est différentiable et donner sa différentielle, puis montrer que f est C^1.

- ▷ $f : E \to F$ constante.
- ▷ $f : E \to F$ linéaire continue.
- ▷ $f : E \times E \to F$ bilinéaire continue.
- ▷ $f : E \to F$ quadratique.

En déduire la différentielle de

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) \mapsto AB \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_2^2 \end{array}$$

Exercice 2 Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$, muni de la norme

$$\|.\|_\infty : P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E \mapsto \max_{k=0,\dots,n} |a_k|$$

Montrer que l'application $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - P^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x - y, y - z, z - x) \end{aligned}$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que
$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 4 On considère les applications

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 y, xy, xy^3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, xyz). \end{array}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice jacobienne de f en (a, b), de g en $f(a, b)$ et de $g \circ f$ en (a, b).

Exercice 5 Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.

1. Justifier que f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\operatorname{Jac} f(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire $\operatorname{Jac} g(0, 0)$.
3. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in B_f((0, 0), r)$, $\|Dg(x, y)\| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que g admet un unique point fixe dans $B_f((0, 0), r)$.

2 Contre-exemples

Exercice 6 (Fonction non différentiable admettant des dérivées directionnelles)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ si } y \neq 0. \end{cases}$$

1. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f admet une dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction de v.
2. Supposons f différentiable en $(0,0)$. Donner sa matrice jacobienne en $(0,0)$, puis calculer $Df(0,0)(1,1)$ de deux manères différentes. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas des dérivées dans toutes les directions)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'admet pas de dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans la direction de $(1,1)$.

Exercice 8 (Fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
4. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne sont pas continues de $(0,0)$.

Exercice 9 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas différentiable)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Si f était différentiable, quelle serait sa différentielle ?
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.