

Différentiabilité : Soit E, F deux e.v.n, $U \subset E$ un ouvert. Une application $f : U \rightarrow F$ est *différentiable* en $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$; on note alors $L = Df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$. Autrement dit, on peut approcher f par une application linéaire au voisinage de a .

Propriété : Si f est différentiable en a , f est continue en a .

Exemples :

- Si f est constante, elle est différentiable en tout $a \in E$ et $Df(a)(h) = 0$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f est différentiable en tout $a \in E$ et $Df(a)(h) = L(h)$.

Lien avec la dérivée : Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable* en a , alors f est différentiable en a et sa différentielle est l'application linéaire

$$Df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto f'(a)h$$

Plus généralement, si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ est une fonction d'une variable, alors elle est dérivable ssi

$$\frac{1}{h}(f(a + h) - f(a))$$

a une limite $f'(a) \in F$ quand $h \rightarrow 0$. Si f est dérivable, alors f est différentiable, et $Df(a)(h) = f'(a)h$.

▲ Attention : La notion de dérivabilité n'a de sens que pour les fonctions d'une variable; sinon, on ne peut pas diviser par h !

Dérivée directionnelle : Soit $f : U \rightarrow F$, $a \in U$, $v \in E$. Alors f admet une *dérivée en a dans la direction de v* si

$$\frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a))$$

a une limite $\vec{D}f(a, v)$ quand $t \rightarrow 0$.

Si f est différentiable en a , alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée en a dans la direction de v et

$$\vec{D}f(a, v) = Df(a)(v).$$

▲ Attention : La réciproque est fautive! L'application

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en 0 mais n'est pas différentiable en 0.

Dérivées partielles : Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, et (e_1, \dots, e_n) la base canonique, on appelle *i -ème dérivée partielle* la dérivée directionnelle dans la direction de e_i (si elle existe!) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)) \in F.$$

C'est donc la dérivée de $x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, \dots, a_n)$ en a_i , c'est-à-dire la dérivée de f "par rapport à x_i ".

Si f est différentiable en a , elle admet donc des dérivées partielles en a , et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \vec{D}f(a, e_i) = Df(a)(e_i).$$

▲ Attention : la réciproque est fautive! L'application

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Matrice jacobienne : Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E , si $f : x = (x_1, \dots, x_n) \in U \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in F$ est différentiable en a , $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ admet une matrice dans la base canonique dont la i -ème colonne est donnée par

$$Df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) \right).$$

On l'appelle *matrice jacobienne de f en a* :

$$\text{Jac}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Applications \mathcal{C}^1 : Une application $f : U \rightarrow F$ est de *classe \mathcal{C}^1* si elle est différentiable sur U et si l'application

$$Df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x \mapsto Df(x)$$

est continue sur U .

▲ Ce n'est pas pareil que de dire que l'application linéaire $h \mapsto Df(x)(h)$ est continue pour tout x !

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$. Alors f est \mathcal{C}^1 ssi ses dérivées partielles sont définies et continues sur U .

C'est le critère qu'on utilise souvent, en pratique, pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable.