Différentiabilité dans les e.v.n. - Méthodes

Caroline Vernier

Différentiabilité : *Méthode 1 : la définition.* Soit $f : U \subset E \to F$. Pour montrer que f est différentiable en a :

1. On calcule $f(a+h)$
2. On répartit les différents termes obtenus entre ce qui ne dépend pas de h (et qui doit faire $f(a)$), ce qui dépend linéairement de h, et le reste :
$$f(a+h) = f(a) + L(h) + R(h)$$
3. On montre que $\frac{1}{\|h\|}R(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.
4. On conclut que f est différentiable et que $Df(a) = L$.

⚠ Attention : Il ne suffit pas de montrer que $R(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Méthode 2 : le critère pratique. On peut aussi montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en a, ce qui implique que f est différentiable en a. Si $E = \mathbb{R}^n$, il suffit pour cela

1. de calculer les dérivées partielles de f en a et au voisinage de a
2. et de montrer qu'elles sont continues en a.
3. On conclut que f est différentiable et pour $h \in E$,
$$\boxed{Df(a)(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}$$

Méthode 3 : fonctions d'une seule variable. Si $E = \mathbb{R}$, alors f est différentiable si, et seulement si, f est dérivable. Il suffit donc de montrer que $f'(a) \in F$ existe. ALors f est différentiable et, pour $h \in E = \mathbb{R}$, $Df(a)(h) = f'(a)h$.

Calcul des dérivées directionnelles et partielles : Pour calculer la dérivée d'une application f en $a \in U$ dans la direction d'un vecteur $v \in E$, on calcule le taux d'accroissement $\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$ et on montre qu'il a une limite quand $t \to 0$. Cette limite donne $\vec{D}f(a,v)$.

Si $E = \mathbb{R}^n$, on calcule généralement les dérivées partielles de f en appliquant les règles usuelles de dérivation à une des variables, en fixant les autres. Autrement dit, on considère les applications partielles $\varphi_i : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, qui sont de braves fonctions d'une variable, et on a
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi_i'(a_i) \text{ pour } i \in [\![1,n]\!]}$$

⚠Pour des fonctions définies par différentes formules sur différentes régions de $\mathbb{R}^n$, typiquement
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
les dérivées partielles en $(0,0)$ s'obtiennent par le calcul du taux d'accroissement. Ainsi,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)).$$
Il ne suffit pas de dériver 0 !

Non-différentiabilité : Soit $f : U \subset E \to F$. Pour montrer que f n'est *pas* différentiable en $a \in U$, on peut, par ordre croissant de résistance de la part de f :

- Montrer que f n'est pas continue en a.
- Montrer qu'il existe une direction v dans laquelle f n'admet pas de dérivée directionnelle
- (Si $E = \mathbb{R}^n$:)Calculer les dérivées partielles de f en a ; alors, si f était différentiable, on aurait
$$Df(a)(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$$
On cherche alors une contradiction :
  - soit en montrant que, avec cette formule pour $Df(a)$, le reste $\frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - Df(a)(h))$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0,
  - soit en montrant qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $\vec{D}f(a,v) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i$

⚠ : Il ne suffit pas de montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que les dérivées partielles ne sont pas continues !

Règles de calcul :

- Si $f, g : U \to F$ sont différentiables en $a \in U$, alors pour tous λ, μ dans $\mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ aussi, et $\boxed{D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a)}$.
- Si $F = \mathbb{R}$, et si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $a \in U$, alors fg aussi et $\boxed{D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)}$.
⚠ ça n'a de sens que pour des fonctions à valeurs réelles !
- Si $f : U \to F$ est différentiable en a, et $g : V \subset F \to G$ est différentiable en $f(a)$ (en particulier, $f(a) \in V$), alors $g \circ f$ est différentiable en a et
$$\boxed{D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)}$$

Ce dernier point est particulièrement intéressant, car si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^m$, on peut calculer la différentielle de la composée via le produit des matrices jacobiennes de f et g :

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_{(g\circ f)}(a) &= \mathrm{Jac}_g(f(a)) \cdot \mathrm{Jac}_f(a) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_p}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Une autre application de cette formule est le cas suivant. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, soit $\varphi_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en t_0. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application différentiable en $\varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$. Alors l'application $g : I \to F, t \mapsto f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est dérivable en t_0 et
$$\boxed{g'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0))\varphi_i'(t_0)}$$