

## CC1 - SUJET A

Durée : 1h30.

**Exercice 1** On munit l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme matricielle  $\|\cdot\|$ , qui vérifie donc  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ . On considère l'application

$$f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{Tr}(AB^2) \in \mathbb{R}$$

1. Justifier qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute matrice  $M$ ,  $|\text{Tr}(M)| \leq C\|M\|$ .
2. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer sa différentielle.
3. On pose, pour  $A_0, B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$f_{B_0} : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A, B_0) = \text{Tr}(AB_0^2) \in \mathbb{R}$$

$$g_{A_0} : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A_0, B) = \text{Tr}(A_0B^2) \in \mathbb{R}$$

Montrer que  $g_{A_0}$  et  $f_{B_0}$  sont différentiables, et que  $\forall (A_0, B_0), (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) = Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2)$$

**Exercice 2** On considère l'application

$$F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x + y^3 + y^2 + y, -x + y + 2z \right) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que  $F$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme local au voisinage de tout point de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que les fonctions

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 + t^2 + t$$

sont strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer leurs limites en  $\pm\infty$ .

3.  $F$  réalise-t-elle un  $C^1$ -difféomorphisme global  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 3** On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^2 + z^2 & = 1 \\ x^2 + y^2 & = 4 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle  $I$  contenant 0 et deux fonctions  $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement négatives telles que, pour tout  $x \in I$ ,  $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$  est solution de  $(\star)$ .
2. Calculer, pour tout  $x \in I$ ,  $\varphi_1'(x)$  en fonction de  $x$  et  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2'(x)$  en fonction de  $x$  et  $\varphi_2(x)$ .
3. Donner la valeur de  $\varphi_1(0)$  et de  $\varphi_2(0)$ .