Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC1 -Sujet B

Durée : 1h30.

Exercice 1 On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|.\|$, qui vérifie donc $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$. On considère l'application

$$f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{Tr}(BAB) \in \mathbb{R}$$

1. Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute matrice M, $|\operatorname{Tr}(M)| \leqslant C\|M\|$.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
3. On pose, pour $A_0, B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f_{B_0} : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A, B_0) = \operatorname{Tr}(B_0AB_0) \in \mathbb{R}$$
$$g_{A_0} : B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A_0, B) = \operatorname{Tr}(BA_0B) \in \mathbb{R}$$

Montrer que g_{A_0} et f_{B_0} sont différentiables, et que $\forall (A_0, B_0), (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) = Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2)$$

Exercice 2 On considère l'application

$$G : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}, x - y^3 + y^2 - y, x + 3y - z\right) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que G réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que les fonctions

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-t} - e^t}{2}$$
$$\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto -t^3 + t^2 - t$$

sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$. Déterminer leurs limites en $\pm\infty$.

3. G réalise-t-elle un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$?

Exercice 3 On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^2 + z^2 & = 1 \\ x^2 + y^2 & = 4 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle J contenant 0 et deux fonctions $\psi_1, \psi_2 : J \to \mathbb{R}$ strictement positives telles que, pour tout $z \in I$, $(\psi_1(z), \psi_2(z), z)$ est solution de $(\star)$.
2. Calculer, pour tout $z \in J$, $\psi_1'(z)$ en fonction de z et $\psi_1(z)$ et $\psi_2'(z)$ en fonction de z et $\psi_2(z)$.
3. Donner la valeur de $\psi_1(0)$ et de $\psi_2(0)$.