CC1 - Sujet B - Corrigé

March 17, 2023

Exercice 1

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle $\|.\|$, qui vérifie donc $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. On considère l'application

$$f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(BAB) \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(M)| \leq C\|M\|$.*

   L'application $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc c'est une application linéaire continue.
   La caractérisation de la continuité pour les applications linéaires nous donne donc bien $C > 0$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(M)| \leq C\|M\|$.

2. *Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.*

   On va utiliser la norme produit $\|(A, B)\|_1 = \|A\| + \|B\|$ sur l'espace produit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soient $X = (A, B), H = (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule

$$\begin{aligned} f(X + H) = f((A, B) + (H_1, H_2)) &= Tr((B + H_2)(A + H_1)(B + H_2)) \\ &= Tr((BA + BH_1 + H_2A + H_2H_1)(B + H_2)) \\ &= Tr(BAB + BAH_2 + BH_1B + BH_1H_2 \\ &+ H_2AB + H_2AH_2 + +H_2H_1H_2) \\ &= \underbrace{Tr(BAB)}_{f(A,B)} + \underbrace{Tr(BAH_2 + BH_1B + H_2AB)}_{\text{linéaire en } H} \\ &+ \underbrace{Tr(H_2AH_2 + BH_1H_2 + H_2H_1B + H_2H_1H_2)}_{:=R(H)} \end{aligned}$$

   et on a alors,en utilisant la constante C obtenue en 1., et en remarquant que $\|H_1\| \leq \|H_1\| + \|H_2\| = \|H\|_1$,

$$\begin{aligned} \frac{|R(H)|}{\|H\|_1} &\leq C\frac{\|H_2AH_2 + BH_1H_2 + H_2H_1B + H_2H_1H_2\|}{\|H\|_1} \\ &\leq C\frac{\|A\|\|H_2\|^2 + 2\|H_1\|\|H_2\|\|B\| + \|H_1\|\|H_2\|^2}{\|H\|_1} \\ &\leq C\frac{\|A\|\|H\|_1^2 + 2\|H\|_1^2\|B\| + \|H\|_1^3}{\|H\|_1} \\ &\leq C(\|A\| + 2\|B\| + \|H\|_1)\|H\|_1 \xrightarrow[H\to(0,0)]{} 0 \end{aligned}$$

   donc f est différentiable en (A, B),quel que soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a

$$Df(A, B) : H = (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(BAH_2 + BH_1B + H_2AB) \in \mathbb{R}$$

3. *On pose, pour $A_0, B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} f_{B_0} &: A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A, B_0) = Tr(B_0AB_0) \in \mathbb{R} \\ g_{A_0} &: B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(A_0, B) = Tr(BA_0B) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Montrer que f_{B_0} et g_{A_0} sont différentiables, et que $\forall (A_0, B_0), (H_1, H_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) = Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2)$$

Remarquons que $f_{B_0} = f \circ \Phi_{B_0}$ avec $\Phi_{B_0} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (M, B_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $\Phi_{B_0} = (id_M, B_0)$ est différentiable, catr ses composantes le sont : la première est $id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, qui est linéaire continue, et la deuxième est constante. On a donc

$$D\Phi_{B_0}(M)(H_1) = (H_1, 0)$$

et donc, f_{B_0} est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a , pour tout $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} Df_{B_0}(A_0)(H_1) &= Df(\Phi_{B_0}(A_0)) \circ D\Phi_{B_0}(A_0)(H_1) \\ &= Df(A_0, B_0)(H_1, 0) \end{aligned}$$

On n'a pas besoin de calculer directement $Df_{B_0}(A)$, du coup, mais ce ne serait pas dur car f_{B_0} est linéaire continue, donc en fait quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$Df_{B_0}(A)(H) = f_{B_0}(H) = Tr(B_0 H B_0).$$

On montre de même que, pour tout A_0, g_{A_0} est différentiable et

$$Dg_{A_0}(B_0)(H_2) = Df(A_0, B_0)(0, H_2)$$

On a donc, par linéarité de $Df(A_0, B_0)$,

$$\begin{aligned} Df(A_0, B_0)(H_1, H_2) &= Df(A_0, B_0)((H_1, 0) + (0, H_2)) \\ &= Df(A_0, B_0)(H_1, 0) + Df(A_0, B_0)(0, H_2) \\ &= Df_{B_0}(A_0)(H_1) + Dg_{A_0}(B_0)(H_2) \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'application

$$G : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}, x - y^3 + y^2 - y, x + 3y - z \right) \in \mathbb{R}^3$$

1. *Montrer que G réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^3$.*

   Remarquons que F est $\mathcal{C}^1$ car ses composantes sont soit des composées d'applications $\mathcal{C}^1$, soit des polynômes. Soit $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, on calcule

$$Jac\ G(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3y_0^2 + 2y_0 - 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   donc

$$\det(Jac\ G(x_0, y_0, z_0)) = -\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2}(3y_0^2 - 2y_0 + 1)$$

   or, quel que soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $e^{x_0} + e^{-x_0} > 0$ et $3y_0^2 - 2y_0 + 1 > 0$ car le polynôme $P(y) = 3y^2 - 2y + 1$ n'a pas de racines réelles. Donc, pour tout $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\det(Jac\ G(u_0)) \neq 0$ et $DG(u_0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc un voisinage U_{u_0} de u_0 et un voisinage V_{u_0} de $G(u_0)$ tels que $G_{|U_{u_0}} : U_{u_0} \to V_{u_0}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2. *Montrer que les fonctions*

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-t} - e^{t}}{2} \in \mathbb{R}$$
$$\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto -t^3 + t^2 - t \in \mathbb{R}$$

sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. *Déterminer leurs limites en* $\pm\infty$.

On a pour tout $t > 0$,

$$\alpha'(t) = -\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} < 0 \text{ et } \beta'(t) = -3t^2 + 2t - 1 = -P(t) < 0$$

donc α et β sont strictement décroissantes (et donc injectives).
De plus,

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = -\infty, \lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = +\infty,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \beta(t) = -\infty, \lim_{t\to-\infty} \beta(t) = +\infty,$$

(Du coup, puisque α et β sont continues, elles sont surjectives par le théorème des valeurs intermédiaires).

3. *G réalise-t-elle un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$?*

On a déjà obtenu que $DG(u_0)$ est un isomorphisme linéaire, quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}^3$.
D'après le théorème d'inversion globale, c'est donc un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to G(\mathbb{R}^3)$ ssi G est injective.
$\rightsquigarrow$ Mais ça ne nous suffit pas, on veut un C^1-difféomorphisme global $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donc il faut montrer que G est injective et $G(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$, autrement dit que G est bijective $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.Alors on a

$$G(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} & = a \\ x - y^3 + y^2 - y & = b \\ x + 3y - z & = c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha(x) & = a \\ \beta(y) + x & = b \\ x + 3y - z & = c \end{cases}$$

or, on a trouvé en 2. que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = -\infty, \lim_{t\to-\infty} \alpha(t) = +\infty$, donc, comme α est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(x_0) = a$. De plus, puisque α est strictement décroissante, elle est injective, donc x_0 est unique. Donc

$$F(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x & = x_0 \\ \beta(y) & = b - x_0 \\ 3y - z & = c - x_0 \end{cases}$$

D'après les mêmes arguments, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, donc il existe un unique $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(y_0) = b - x_0$.
Donc

$$F(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x & = x_0 \\ y & = y_0 \\ -z & = c - x_0 - 3y_0 \end{cases}$$

On a donc obtenu que tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$admet un unique antécédent $(x_0, y_0, \frac{1}{2}(-c + x_0 + 3y_0)) \in \mathbb{R}^3$, donc c'est une bijection.
Par le théorème d'inversion globale, G est donc un C^1-difféomorphisme $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On considère le système d'équations

$$(\star)\begin{cases} x^2+z^2 &= 1\\ x^2+y^2 &= 4\end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe un intervalle J contenant 0 et deux fonctions $\psi_1, \psi_2 : J \to \mathbb{R}$ strictement positives telles que, pour tout $z \in J$, $(\psi_1(z), \psi_2(z), z)$ est solution de $(\star)$.*

   Notons
   $$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x^2+z^2-1, x^2+y^2-4) \in \mathbb{R}^2$$
   Alors f est C^1, car ses composantes sont des polynômes, et
   $$(x,y,z) \text{ solution de } (\star) \iff f(x,y,z) = (0,0)$$
   On va chercher à appliquer le Théorème des Fonctions Implicites à f.
   $\rightsquigarrow$ On cherche des fonctions ψ_1, ψ_2 défiies au voisinage de 0: on va donc l'appliquer au voisinage d'un point du type $u_0 = (x_0, y_0, 0)$. Or,
   $$f(x_0,y_0,0) = (0,0) \iff \begin{cases} x_0^2 &= 1\\ x_0^2+y_0^2 &= 4\end{cases} \iff \begin{cases} x_0 &= \pm 1\\ y_0 &= \pm\sqrt{3}\end{cases}$$
   $\rightsquigarrow$ On cherche de plus des fonctions positives, donc on va choisir $u_0 = (1, \sqrt{3}, 0)$.
   On a déjà noté que f est C^1, et on a, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$Jac\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z\\ 2x & 2y & 0\end{pmatrix} \text{ donc } Jac\, f(1,\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 2 & 2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$$
   $\rightsquigarrow$ La sous-matrice des dérivées partielles par rapport à y et z est
   $$D_{(x,y)}f(0,-1,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 2 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
   dont le déterminant est $4\sqrt{3} \neq 0$. Donc $D_{(y,z)}f(1,\sqrt{3},0)$ est inversible.
   On peut donc appliquer le TFI à f en $(1,\sqrt{3},0)$: il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de $(1,\sqrt{3})$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction C^1 $\psi : U \to V$ tels que
   $$\begin{matrix} (x,y,z) \in V \times U \\ \text{solution de } (\star)\end{matrix} \iff \begin{matrix} (x,y,z) \in V \times U \\ f(x,y,z) = (0,0)\end{matrix} \iff \begin{matrix} z \in U \\ (x,y) = \psi(z)\end{matrix} \tag{1}$$
   Comme V est un voisinage de $(1,\sqrt{3})$,et ψ est continue, on peut supposer, quitte à restreindre ψ à l'ouvert $U^+ = \varphi^{-1}(\ ]0,+\infty[^2)$,que φ est à valeurs dans $]0,+\infty[$, et donc que φ_1, φ_2 sont strictement positives. Puisque U^+ est un ouvert qui contient 0, il existe $r > 0$ tel que l'intervalle $J =]-r, r[\subset U^+$, et si on note, pour tout $z \in I$,$\psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z))$,on a, pour tout $z \in J$,$(\psi_1(z), \psi_2(z), z)$ solution de $(\star)$ avec $\psi_1(x) > 0, \psi_2(x) > 0$.

2. *Calculer, pour tout $z \in J$, $\psi_1'(z)$ en fonction de z et $\psi_1(z)$ et $\psi_2'(z)$ en fonction de x et $\psi_2(z)$.*

   De plus, par le TFI, on a, pour tout $z \in J$,
   $$D\psi(z) = -D_{(x,y)}f(\psi(z),z)^{-1} \circ D_z f(\psi(z),z)$$
   ce qui donne, en utilisant $Jac\, f(\psi_1(z), \psi_2(z), z)$ et le lien dérivée-différentielle pour ψ,
   $$\begin{pmatrix}\psi_1'(z)\\ \psi_2'(z)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2\psi_1(z) & 0\\ 2\psi_1(z) & 2\psi_2(z)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2z\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{4\psi_1(x)\psi_2(x)}\begin{pmatrix} 2\psi_2(z) & 0\\ -2\psi_1(z) & 2\psi_1(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2z\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\psi_1(z)}\\ \frac{z}{\psi_2(z)}\end{pmatrix}$$

3. *Donner la valeur de $\varphi_1(0)$ et de $\varphi_2(0)$.*

   On sait que $(1,\sqrt{3},0) \in V \times U$ et $f(1,\sqrt{3},0) = (0,0)$, donc par (1), $(1,\sqrt{3}) = \psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0))$.