Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments de calcul intégral et différentiel

CC2

Durée : 1h30.

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Donner la définition de l'espace $\mathscr{L}^p(\mu)$.
2. Enoncer l'inégalité de Hölder.

Exercice 2 On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^2y + 3y + z^3 - z & = 8 \\ 2x + 2y + cos(xz) & = 7 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant 2 et deux fonctions $\mathcal{C}^1$ ψ_1, ψ_2 : $J \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in J$, $(\psi_1(t), t, \psi_2(t))$ est solution de $(\star)$ et $\psi_1(2) = 1$.
2. Déterminer $\psi_2(2)$, ainsi que $\psi_1'(2)$ et $\psi_2'(2)$.

Exercice 3 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + 3y$ sur l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x - 3y = 1, x^2 + z^2 = 5\}$$

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

on considère l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}, u_0 = (2, 1, 1)$$

1. Montrer que $K = \overline{B}(u_0, 34) \cap \mathcal{P}$ est un compact non vide.
2. Montrer que la fonction $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ admet un minimum sur K en un point u_{min} de $\mathcal{P}$.
3. Déterminer le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de u_0.