Compléments d'Analyse
CC2 2023 - Corrigé

April 22, 2023

Exercice 1

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. *Donner la définition de l'espace $\mathscr{L}^p(\mu)$.*

   Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit le sous-espace vectoriel $\mathscr{L}^p(\mu)$ de l'e.v. $\mathscr{L}^0((X, \mathscr{T}), \mathbb{R})$ des fonctions mesurables $(X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ par

   $$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{T}, \mathbb{R}), \int_X^* |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

2. *Enoncer l'inégalité de Hölder.*

   Soient $p, q \in [1, +\infty[$ sont deux exposants conjugués, autrement dit tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

   $$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Exercice 2

On considère le système d'équations

$$(\star) \begin{cases} x^2y + 3y + z^3 - z & = 8 \\ 2x + 2y + \cos(xz) & = 7 \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant 2 et deux fonctions $\mathcal{C}^1$ $\psi_1, \psi_2 : J \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in J$,$(\psi_1(t), t, \psi_2(t))$ est solution de $(\star)$ et $\psi_1(2) = 1$.*

   Correction: Posons, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

   $$g(x, y, z) = (x^2y + 3y + z^3 - z - 8, 2x + 2y + \cos(xz) - 7) \in \mathbb{R}^2$$

   Ainsi, (x, y, z) est solution de $(\star)$ ssi $g(x, y, z) = (0, 0)$.
   $\rightsquigarrow$ La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$: ses composantes sont respectivement un polynôme sur $\mathbb{R}^3$ et une somme de composée de fonctions $\mathcal{C}^1$. (Par contre, g n'est pas polynomiale: cos n'est pas un polynôme !)
   Et on a, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

   $$\operatorname{Jac} g(u) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 3 & 3z^2 - 1 \\ 2 - z\sin(xz) & 2 & -x\sin(xz) \end{pmatrix}$$

On cherche les zéros de g pour y au voisinage de 2 et x au voisinage de 1. Cherchons donc une solution $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $(\star)$ telle que $y_0 = 2, x_0 = 1$: z_0 doit donc vérifier

$$\begin{cases} 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + z_0^3 - z_0 & = 8 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cos(1 \cdot z_0) & = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0^3 - z_0 = z_0(z_0^2 - 1) & = 0 \\ \cos(z_0) & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 = 0, 1 \text{ ou } -1 \\ \cos(z_0) = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ La seule solution est $z_0 = 0$. Posons donc $u_0 = (1, 2, 0)$;alors $g(1, 2, 0) = (0, 0)$ et

$$\operatorname{Jac} g(u_0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La sous-matrice correspondant aux dérivées partielles par rapport à x et z donne

$$D_{(x,z)} g(u_0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det D_{(x,z)} g(u_0) = 2 \neq 0$$

donc $D_{(x,z)} g(u_0)$ est un isomorphisme. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut donc exprimer les zéros de g au voisinage de u_0 en fonction de (x, z) : il existe donc un voisinage U de 2 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage V de $(1, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, ainsi qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ $\psi : y \in U \to (\psi_1(y), \psi_2(y)) \in V$ telle que

$$\begin{matrix} (x, z) \in V, y \in U & \iff & y \in U \\ g(x, y, z) = (0, 0) & & (x, z) = \psi(y) \end{matrix}$$

Puisque Uest un voisinage de 2, il existe $r > 0$ tel que $J = B(2, r) =]\, 2 - r, 2 + r\, [\subset U$ et on a, pour tout $t \in J$,

$$g(\psi_1(t), t, \psi_2(t))(0, 0) \text{ i.e. } (\psi_1(t), t, \psi_2(t)) \text{ solution de } (\star).$$

Attention: Le TFI nous donne un voisinage, mais ce voisinage n'est pas forcément un intervalle.

2. *Déterminer $\psi_2(2)$, ainsi que $\psi_1'(2)$ et $\psi_2'(2)$.*

Correction: On a $(1, 0) \in V, 2 \in I \subset U$ et $g(1, 2, 0) = (0, 0)$ donc $\psi(2) = (1, 0)$, donc $\psi_1(2) = 1$ (ce qu'on savait déjà) et $\boxed{\psi_2(2) = 0}$.

Par ailleurs,

$$D\psi(2) = -D_{(x,z)} g(u_0)^{-1} D_y g(u_0)$$

ce qui donne, en utilisant le lien entre dérivée des fonctions à une variable et différentielle

$$\psi'(2) = \begin{pmatrix} \psi_1'(2) \\ \psi_2'(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\psi_1'(2) = -1}$, $\boxed{\psi_2'(2) = -0}$.

Exercice 3

Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + 3y$ sur l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x - 3y = 1, x^2 + z^2 = 5\}$$

Correction: On définit la fonction

$$g : u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\underbrace{4x - 3y - 1}_{g_1(u)}, \underbrace{x^2 + z^2 - 5}_{g_2(u)}) \in \mathbb{R}^2$$

de façon à ce que $\Gamma = g^{-1}(\{(0, 0)\}$.

- Remarquons d'abord que g est à composantes polynomiales, donc continue sur $\mathbb{R}^3$, et $\{(0,0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$,donc $\Gamma = g^{-1}(\{(0,0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.
  De plus, pour tout $u = (x, y, z) \in \Gamma$,on a
$$0 \leq x^2 \leq x^2 + z^2 = 5 \text{ donc } |x| \leq \sqrt{5}$$
$$0 \leq z^2 \leq x^2 + z^2 = 5 \text{ donc } |z| \leq \sqrt{5}$$
  et de là, $y = \dfrac{1}{3}(4x - 1)$ donc
$$|y| \leq \frac{4}{3}|x| + \frac{1}{3} \leq \frac{4\sqrt{5}+1}{3}$$
  On en déduit que $\|u\|_\infty \leq \dfrac{4\sqrt{5}+1}{3}$, donc Γ est borné.
  $\rightsquigarrow$ Γ est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty)$ qui est un e.v.n. de dimension finie. Donc c'est un compact de $\mathbb{R}^3$. Or, f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^3$. Par le théorème de Weierstrass, on en déduit que $f_{|\Gamma}$ admet des extrema globaux sur Γ.

- Déterminons ces extrema. Les composantes de g sont polynomiales, donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. De même, f est polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On a, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\nabla f(u) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \nabla g_1(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \nabla g_2(u) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \operatorname{Jac} g(u) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$
  Remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,$\nabla g_1(u)$ et $\nabla g_2(u)$ sont colinéaires ssi $\nabla g_2(u) = 0 = 0 \cdot \nabla g_1(u)$.
  Or, dans ce cas, on a $x = z = 0$. Mais si $x = z = 0$ alors $x^2 + z^2 \neq 5$, donc $u \notin \Gamma$.
  $\rightsquigarrow$ Donc, pour tout $u \in \Gamma$, les deux lignes de la matrice $\operatorname{Jac} g(u)$ sont linéairement indépendantes, et donc $\operatorname{rg}(\operatorname{Jac} g(u)) = 2$. On en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $Dg(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ est surjective.

  Attention: il ne suffit pas de vérifier que $Dg(u) \neq 0$ sur Γ !
  Attention 2: g n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\nabla g(u)$ n'existe pas. Le gradient est uniquement défini pour les fonctions à valeurs réelles.

On est donc dans le cadre d'application du Théorème des Extrema Liés: si $u = (x, y, z) \in \Gamma$ est un extremum de $f_{|\Gamma}$,alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\nabla f(u) = \lambda_1 \nabla g_1(u) + \lambda_2 \nabla g_2(u)$$
ce qui donne
$$\begin{cases} 2x = 4\lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 3 = -3\lambda_1 \\ 0 = 2\lambda_2 z \\ 4x - 3y = 1 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda_2)x = 2\lambda_1 = -2 & (L_1) \\ \lambda_1 = -1 & (L_2) \\ \lambda_2 z = 0 & (L_3) \\ 4x - 3y = 1 & (L_4) \\ x^2 + z^2 = 5 & (L_5) \end{cases}$$
D'après (L_3), deux cas se présentent:

- Cas 1: $\lambda_2 = 0$. Dans ce cas,
$$(L_1) \rightsquigarrow x = -2$$
$$(L_4) \rightsquigarrow y = \frac{1}{3}(4x - 1) = -3$$
$$(L_5) \rightsquigarrow z^2 = 5 - 4 = 1 \text{ donc } z = \pm 1$$

On obtient ainsi deux possibles extrema de $f_{|\Gamma}$:

$$\boxed{u_1 = (-2,-3,-1),\ u_2 = (-2,-3,1)}$$

- Cas 2: $z = 0$. Dans ce cas, (L_5) donne $x^2 = 5$, donc $x \pm \sqrt{5}$. De là, par (L_4),on trouve

$$y = \frac{1}{3}(4x-1) \text{ donc } \begin{cases} y = \dfrac{4\sqrt{5}-1}{3} & \text{si } x = \sqrt{5} \\ y = -\dfrac{4\sqrt{5}+1}{3} & \text{si } x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

On obtient ainsi deux autres possibles extrema de $f_{|\Gamma}$

$$\boxed{u_3 = \left(\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{5}-1}{3}, 0\right),\ u_4 = \left(-\sqrt{5}, -\frac{4\sqrt{5}+1}{3}, 0\right)}$$

Les extrema globaux de f sur Γ,dont on a démontré l'existence plus haut, se trouvent parmi ces 4 points. Or,

$$f(u_1) = f(u_2) = -5 \leq f(u_4) = 4 - 4\sqrt{5} \leq f(u_3) = 4 + 4\sqrt{5}$$

donc $u_1$et u_2 sont les minima globaux de $f_{|\Gamma}$, et u_3 est un maximum global.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne

$$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

on considère l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 1\}, u_0 = (2,1,1)$$

1. *Montrer que $K = \overline{B}(u_0, 34) \cap \mathcal{P}$ est un compact non vide.*

   On définit la fonction

   $$g : u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x+y+z$$

   $\rightsquigarrow$ g est une application linéaire définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, donc g est continue. Comme $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathcal{P} = g^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, la boule fermée $\overline{B}(u_0, 34)$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^3$, donc K est une intersection de fermés de $\mathbb{R}^3$, donc c'est un fermé. **Attention**: $\mathcal{P}$ n'est pas un compact: c'est un plan dans $\mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{P}$ n'est pas borné. Et l'image réciproque d'un compact par une fonction continue n'est pas (nécessairement) un compact.

2. De plus, $K = \mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0, 34) \subset \overline{B}(u_0, 34)$ qui est borné, donc K est borné.
   $\rightsquigarrow$ K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, donc c'est un compact de $\mathbb{R}^3$.
   De plus, $w_0 = (1,0,0) \in \mathcal{P}$ et $\|w - u_0\| = \|(-1,-1,-1)\| = \sqrt{3} \leq 34$,donc $w_0 \in \overline{B}(u_0, 34)$
   $\rightsquigarrow$ $w_0 \in \mathcal{P} \cap \overline{B}(u_0, 34) = K$, donc $K \neq \emptyset$.

3. *Montrer que la fonction $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ admet un minimum sur K en un point u_{min} de $\mathcal{P}$.*

   La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de Weierstrass, elle est donc bornée sur le compact K, et elle atteint ses bornes sur K : en particulier, il existe $u_{min} \in K$ tel que, pour tout $u \in K$, $f(u_{min}) \leq f(u)$.

4. *Déterminer le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de u_0.*

Remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3, f(u) = \|u - u_0\|^2$, donc le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de u_0 serait le minimum de $f_{|\mathcal{P}}$,s'il existe.

Attention: Il faut expliquer le lien entre les extrema de f et la question du point le plus proche de u_0 !

Or, on sait que $f_{|K}$ admet un minimum: il existe $u_{\min} \in \mathcal{P}$ tel que, pour tout $u \in K, f(u_{min}) \leq f(u)$.

Attention 2: Il faut justifier que le minimum sur K est aussi le minimum sur $\mathcal{P}$: il se pourrait, a priori, qu'il y ait un point sur $\mathcal{P} \backslash K$ qui soit encore plus minimal !

Montrons que u_{min} est un minimum global de $f_{|\mathcal{P}}$. On a, pour tout $u \in \mathcal{P}$,

- Soit $u \in \overline{B}(u_0, 34)$, dans ce cas $u \in K$ et $f(u) \geq f(u_{min})$;
- Soit $u \notin \overline{B}(u_0, 34)$,et dans ce cas, en utilisant le point $w \in K$ trouvé en 1., $f(u) = \|u - u_0\|^2 > 34^2 \geq \|w_0 - u_0\|^2 = f(w) \geq f(u_{\min})$.

$\rightsquigarrow$ Dans tous les cas, $f(u) \geq f(u_{min})$ donc la distance entre u et u_0 est plus grande que la distance entre u_{min} et u_0. Le pointde $\mathcal{P}$ le plus proche de u_0 est donc $u_{min/}$.

On cherche donc à déterminer u_{min} , le minimum global de $f_{|\mathcal{P}}$.

- Remarquons d'abord que f et g sont polynomiales, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\nabla f(u) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}, \nabla g(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  donc, pour tout $u \in \mathbb{R}^3, \nabla g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

- On est donc dans le cadre d'application du TEL: si $u \in \mathcal{P}$ est un extremum local de $f_{|\mathcal{P}}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(u) = \lambda \nabla g(u), \text{ c.à.d } \begin{cases} 2(x-2) & = \lambda \\ 2(y-1) & = \lambda \\ 2(z-1) & = \lambda \\ x+y+z & = 1 \end{cases}$$

  En sommant les trois premières lignes, on trouve

$$2(x + y + z) - 2(2 + 1 + 1) = 3\lambda$$

  d'où, en utilisant la dernière ligne,

$$2 \cdot 1 - 8 = 3\lambda \text{ càd } \lambda = -2$$

  On en déduit

$$\begin{cases} 2(x-2) = -2 & \rightsquigarrow x = 1 \\ 2(y-1) = -2 & \rightsquigarrow y = 0 \\ 2(z-1) = -2 & \rightsquigarrow z = 0 \end{cases}$$

  Il y a donc un seul point candidat: $(1, 0, 0)$, et puisqu'on sait que $f_{\mathcal{P}}$ admet un minimum global, on a nécessairement $\boxed{u_{min} = (1, 0, 0)}$.