Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Correction : Calcul différentiel - Exercices sur le TIL

Exercice 9 Soient a, $b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + a\cos(y), y + b\sin(x)). \end{array}$$

1. A quelle condition sur (a, b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.

Correction : L'application f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque chacune de ses composantes est une fonction usuelle $\mathscr{C}^1$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Jac_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -a\sin(y) \\ c\cos(x) & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \det(Jac_f(x,y)) = 1 + ab\cos(x)\sin(y)$$

D'après le théorème d'inversion locale, pour que f soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local, il faut et il suffit que $Df(x, y)$ soit inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$, autrement dit

$$f \text{ est un } \mathscr{C}^1\text{-difféo local} \iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \det(Jac_f(x,y)) = 1 + ab\cos(x)\sin(y) \neq 0.$$

Or,

$$1 + ab\cos(x)\sin(y) = 0 \iff ab \neq 0 \text{ et } \cos(x)\sin(y) = -\frac{1}{ab}$$

Deux cas se présentent :

- ▷ Si $\left|-\frac{1}{ab}\right| \leqslant 1$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x_0) = -\frac{1}{ab}$ et on a alors $\det(Jac_f(x_0, \frac{\pi}{2})) = 0$. Dans ce cas, f n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de $(x_0, \frac{\pi}{2})$.
- ▷ Si $\left|-\frac{1}{ab}\right| > 1$, alors pour tous x, y,

$$|\cos(x)\sin(y)| \leqslant 1 < \left|-\frac{1}{ab}\right|$$

  donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(Jac_f(x,y)) = 1 + ab\cos(x)\sin(y) \neq 0$.

On obtient donc que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$ ssi $|ab| < 1$. A partir d'ici, on suppose donc que c'est le cas.

2. Montrer que pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$.

Correction : Par le théorème des accroissements finis, pour tous réels $t_1 \leqslant t_2$, il existe $c \in [t_1, t_2]$ tel que

$$|\sin(t_1) - \sin(t_2)| = |\cos(c)||t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_2|.$$

3. En déduire que f réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Correction : Montrons que f est injective, ce qui nous permettra d'appliquer le théorème d'inversion globale. Pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x_1 + a\cos(y_1) = x_2 + a\cos(y_2) \\ y_1 + b\sin(x_1) = y_2 + b\sin(x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = a(\cos(y_2) - \cos(y_1)) \\ y_1 - y_2 = b(\sin(x_2) - \sin(x_1)) \end{cases}$$

On en déduit que

$$|x_1 - x_2| \leqslant |a||\cos(y_2) - \cos(y_1)| \leqslant |a||y_2 - y_1| = |ab||\sin(x_2) - \sin(x_1)| \leqslant |ab||x_1 - x_2|$$

donc $(1 - |ab|)|x_1 - x_2| \leqslant 0$. Puisque $|ab| < 1$, ceci implique $|x_1 - x_2| = 0$, donc $\boxed{x_1 = x_2}$. De là, on déduit que $y_1 - y_2 = b(\sin(x_2) - \sin(x_1)) = 0$, donc $\boxed{y_1 = y_2}$.

$\rightsquigarrow$ Ainsi, dès lors que $|ab| < 1$, f est injective sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème d'inversion globale, f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur son image.

Exercice 10 Montrer que $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x, y, z) = (e^y + e^z, e^x + e^y, x - y) \in \mathbb{R}^3$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

Correction : L'application f est $\mathscr{C}^1$, puisque chacune de ses composantes est une somme de fonctions usuelles $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On va voir qu'on peut appliquer le théorème d'inversion globale à f.

— Montrons que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de chaque $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit donc$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Jac_f(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & e^y & e^z \\ e^x & e^y & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \det(Jac_f(x, y)) = -e^z(e^x + e^y) \neq 0$$

On en déduit que $Df(x, y, z)$ est inversible, donc, par le théorème d'inversion locale, f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphsime au voisinage de (x, y, z).

— Montrons que f est injective. Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \iff \begin{cases} e^{y_1} + e^{z_1} = e^{y_2} + e^{z_2} \\ e^{x_1} + e^{y_1} = e^{x_2} + e^{y_2} \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{y_1} + e^{z_1} = e^{y_2} + e^{z_2} \\ e^{x_1}(1 + \underbrace{e^{y_1 - x_1}}_{= e^{y_2 - x_2}}) = e^{x_2}(1 + e^{y_2 - x_2}) \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} e^{z_1} = (e^{y_2} - e^{y_1}) + e^{z_2} \\ e^{x_1} = e^{x_2} \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = z_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Donc f est bien injective.

Par le théorème d'inversion globale, on en déduit que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur son image.