Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2021-2022
Compléments d'analyse

Correction : Calcul différentiel - Exercices sur le TFI

Exercice 13 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert I de x_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0 = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. Déterminer la dérivée de φ sur I en fonction de x et $\varphi(x)$.

Correction : On va appliquer le théorème des fonctions implicites à f.

$\rightsquigarrow$ L'application f est polynomiale, donc elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sa jacobienne est donnée par

$$Jac_f(x,y,x) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2x \\ yz \end{matrix}}_{D_x f} \ \ \underbrace{\begin{matrix} -2y & 2z \\ xz & xy \end{matrix}}_{D_{(y,z)} f} \right)$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Alors $x_0 y_0 z_0 = 1$ donc aucune des coordonnées n'est nulle. On en déduit que $\det(D_{(y,z)} f(x_0, u_0)) = -2x_0(y_0^2 + z_0^2) \neq 0$. Donc $D_u f(x_0, u_0)$ est inversible.

$\rightsquigarrow$ Par le théorème des fonctions implicites, il existe donc un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ (on peut supposer, quitte à restreindre, que c'est un intervalle I), un voisinage V de $u_0 = (y_0, z_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\mathscr{C}^1$ $\varphi : I \to V$ telle que

$$(x,u) \in I \times V,\ \ f(x,u) = 0 \iff x \in I, u = \varphi(x).$$

$\rightsquigarrow$ De plus, toujours d'après le TFI, pour $x \in I$ et en notant $\varphi(x) = (y(x), z(x))$,

$$\begin{aligned} D\varphi(x) &= -D_{(y,z)} f(x, \varphi(x))^{-1} D_x f(x, \varphi(x)) \\ &= \frac{1}{2x(y(x)^2 + z(x)^2)} \begin{pmatrix} xy(x) & -2z(x) \\ -xz(x) & -2y(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ y(x)z(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2x(y(x)^2 + z(x)^2)} \begin{pmatrix} 2x^2 y(x) - 2z(x)^2 y(x) \\ -2x^2 z(x) - 2y(x)^2 z(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x(y(x)^2 + z(x)^2)} \begin{pmatrix} y(x)(x^2 - z(x)^2) \\ -z(x)(x^2 - y(x)^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, en faisant le lien entre dérivée et différentielle, on trouve

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x(y(x)^2 + z(x)^2)} \begin{pmatrix} y(x)(x^2 - z(x)^2) \\ -z(x)(x^2 - y(x)^2) \end{pmatrix}$$

Exercice 14 On considère l'application $F : (x,y) \in R^2 \mapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$.

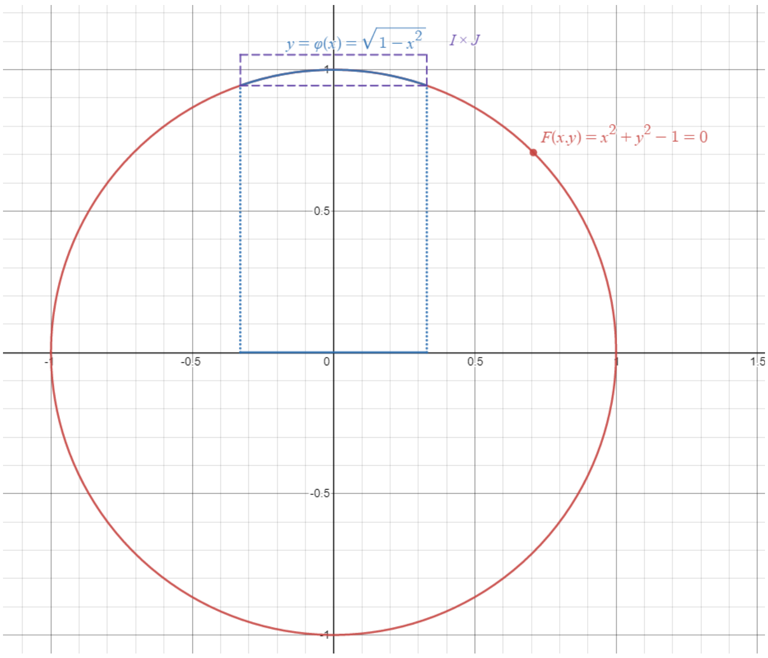
1. Démontrer qu'il existe un intervalle I contenant 0 tel que, pour chaque $x \in I$, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$.
2. Montrer que $y'(x) = -\frac{x}{y}$.

Correction :

1. F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puisque c'est un polynôme, et $F(0,1) = 0$.
   $\rightsquigarrow$ On va appliquer le théorème des fonctions implicites à F au voisinage de $(0,1)$.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$Jac\, F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \text{ donc } Jac\, F(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$
   L'application linéaire $D_yF(0,1)$, représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

   D'après le TFI, il existe donc I voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, J voisinage de 1 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ tels que
$$(\star) \quad \begin{cases} (x,y) \in I \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in I \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$
   De plus, par continuité de φ, si x est assez proche de 0, alors $\varphi(x)$ est proche de 1. Donc, quitte à prendre I plus petit, on peut supposerque pour tout $x \in I$, $\varphi(x) > 0$. On a alors bien, pour tout $x \in I$, qu'il existe un unique $y = \varphi(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$.

2. De plus, pour tout $x \in I$,
$$D\varphi(x) = -D_yF(x,\varphi(x))^{-1} D_xF(x,\varphi(x))^{-1} = -\begin{pmatrix} 2\varphi(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\varphi((x))} \end{pmatrix}$$
   d'où, en faisant le lien entre dérivée et différentielle,
$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi((x))}$$
   Remarque : Normalement, ici s'arrêtent les conlusions du TFI. Mais ici, l'expression de φ' permet de déterminer φ : en effet, on a
$$\begin{aligned} \varphi'(x)\varphi(x) = -x &\iff 2\varphi'(x)\varphi(x) = -2x \\ &\iff (\varphi(x)^2)' = -2x \\ &\iff \varphi(x)^2 = c - x^2 \end{aligned}$$
   Puisque $(0,1) \in I \times J$ et $F(0,1) = 0$, $(\star)$ donne $1 = \varphi(0)$, donc $c = 1$. De plus, on sait que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in I$ donc
$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}.$$
   $\rightsquigarrow$ Ici, on peut expliciter la fonction implicite !



Exercice 15 On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 & = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 & = 4 \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de 0, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système.
Déterminer y' en fonction de x, y et déterminer z' en fonction de x, z.

Correction : On définit

$$F : (x, (y, z)) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + y^2 - 2z^2, x^2 + 2y^2 + z^2 - 4) \in \mathbb{R}^2$$

C'est une application $\mathscr{C}^1$, puisque ses composantes sont polynomiales, et (x, y, z) est solution du système ssi $F(x, y, z) = (0, 0)$. On va appliquer le TFI à F.

$\rightsquigarrow$ On commencer par déterminer au voisinage de quel point on va faire ça. On cherche donc y_0, z_0 positifs tels que $(0, y_0, z_0)$ soit solution du système. Ce qui donne

$$\begin{cases} y_0^2 - 2z_0^2 & = 0 \\ 2y_0^2 + z_0^2 & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0^2 & = 2z_0^2 \\ 5z_0^2 & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0^2 = \frac{8}{5} \\ z_0^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Puisqu'on souhaite $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, on prend donc $y_0 = \sqrt{\frac{8}{5}}$ et $z_0 = \sqrt{\frac{4}{5}}$. On a alors $F(0, x_0, y_0) = (0, 0)$.

On va donc appliquer le TFI à F au voisinage du point $u_0 = (0, \sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})$.

On a, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$Jac\, F(x, y, z) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2x \\ 2x \end{matrix}}_{D_x F(u)} \underbrace{\begin{matrix} 2y & -4z \\ 4y & 2z \end{matrix}}_{D_{(y,z)} F(u)} \right)$$

donc en u_0,

$$Jac\, F(u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{8}{5}} & -4\sqrt{\frac{4}{5}} \\ 0 & 4\sqrt{\frac{8}{5}} & 2\sqrt{\frac{4}{5}} \end{pmatrix}$$

et $\det D_{(y,z)} F(u_0) = 20\sqrt{\frac{8}{5}} \neq 0$, donc $\det D_{(y,z)} F(u_0)$ est inversible.

$\rightsquigarrow$ D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc I voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, U voisinage de $(\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = (y(x), z(x)) \in U$ une application $\mathscr{C}^1$ tels que

$$(x, y, z) \text{ est solution} \iff \begin{cases} (x, (y, z)) \in I \times U \\ F(x, y, z) = (0, 0) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in I \\ (y, z) = \varphi(x) \end{cases}$$

En particulier, puisque $u_0 = (0, (\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})) \in I \times U$ et $F(u_0) = 0$, on a $\varphi(0) = (y(0), z(0)) = (\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})$.

Du coup, puisque φ est continue, si x est assez proche de 0 alors $\varphi(x) = (y(x), z(x))$ est suffisamment proche de $(\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})$ pour que $y(x) > 0$ et $z(x) > 0$. Quitte à réduire I et U on peut donc supposer que, pour tout $x \in I$, $y(x) > 0$ et $z(x) > 0$, comme souhaité.

De plus, pour tout $x \in I$,

$$D\varphi(x) = -D_{(y,z)} F(x, y(x), z(x))^{-1} \circ D_x F(x, y(x), z(x))$$

Donc

$$\begin{aligned}
Jac\,\varphi(x) = \varphi'(x) &= -\begin{pmatrix} 2y(x) & -4z(x) \\ 4y(x) & 2z(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{20y(x)z(x)} \begin{pmatrix} 2z(x) & 4z(x) \\ -4y(x) & 2y(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5y(x)z(x)} \begin{pmatrix} 3xz(x) \\ -xy(x) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{3x}{y(x)} \\ \frac{-x}{z(x)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} y'(x) & = -\frac{3}{5}\frac{x}{y(x)} \\ z'(x) & = \frac{1}{5}\frac{x}{z(x)} \end{cases}$$

Remarque : En procédant comme à l'exercice 14, on peut en déduire que

$$\begin{cases} y(x) = \sqrt{\frac{8}{5} - \frac{3}{5}x^2} \\ z(x) = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}x^2} \end{cases}$$

Exercice 16 On considère l'équation

$$(E) \quad e^x + e^y + x + y - 2 = 0$$

Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un intervalle I contenant 0 et une application $\phi : I \to \mathbb{R}$ telle que $(x,y) \in U$ est solution de l'équation ssi $x \in I$ et $y = \phi(x)$. Calculer le développement limité d'ordre 2 de ϕ en 0.

Correction : On considère l'application :

$$F : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto e^x + e^y + x + y - 2$$

de façon à ce que (x,y) est solution de (E) ssi $(F(x,y) = 0$.

Remarquons que $F(0,0) = 0$. On va appliquer le TFI à F au voisinage de $(0,0)$.

F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque c'est une somme et composée d'applications $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Jac\,F(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + 1 & \boxed{e^y + 1} \end{pmatrix} \text{ donc } Jac\,F(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ L'application linéaire $D_yF(0,0) : h \in \mathbb{R} \mapsto 2h$, représentée par la matrice (2), est inversible.

D'après le TFI, il existe V, W deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\phi : V \to W$ une application $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} (x,y) \in V \times W \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in V \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

De plus, puisque V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe donc $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset V$, autrement dit $]-r, r[\subset V$. Puisqu'on nous demande un intervalle, on peut donc prendre $I =]-r, -r[$ et $U = I \times \phi(I)$. Alors on a bien

$$(\star) \quad \begin{cases} (x,y) \in U \\ \text{ est solution de } (E) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in I \\ y = \phi(x) \end{cases}$$

comme requis.

De plus, pour tout $x \in I$,

$$D\phi(x) = -D_yF(x,\phi(x))^{-1} \circ D_xF(x,\phi(x))$$

est représentée par la matrice de taille 1 dont l'unique coefficient est $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))}$.

En faisant le lien entre dérivée et différentielle, on trouve

$$\phi'(x) = -\frac{e^x+1}{e^{\phi(x)}+1}$$

$\rightsquigarrow$ ϕ' est un quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ (puisque ϕ est $\mathscr{C}^1$), donc ϕ est $\mathscr{C}^2$, et

$$\phi''(x) = -\frac{\phi'(x)(e^{\phi(x)}+1) - \phi'(x)e^{\phi(x)}(e^x+1)}{(e^{\phi(x)}+1)^2}$$

D'autre part, $(0,0) \in U$ est solution de (E) donc par $(\star)$, $\phi(0) = 0$. On en déduit que

$$\phi'(0) = -\frac{e^0+1}{e^{\phi(0)}+1} = -1 \text{ et donc } \phi''(0) = -\frac{\phi'(0)(e^{\phi(0)}+1) - \phi'(0)e^{\phi(0)}(e^0+1)}{(e^{\phi(0)}+1)^2} = -1$$

On en déduit le DL de ϕ en 0 à l'ordre 2 :

$$\phi(x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice 17 Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.
1. Etant donné $(a_0,b_0,c_0,X_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P_0(X_0) = 0$, avec $P_0(X) = X_0^3 + a_0X_0^2 + b_0X_0 + c_0$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de (a_0,b_0,c_0) et une application $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ telle que

$$X(a_0,b_0,c_0) = X_0, \quad \forall (a,b,c) \in \mathcal{U},\ P(X(a,b,c)) = 0.$$

Correction : On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R} \\ (a,b,c,X) &\mapsto X^3 + aX^2 + bX + c = P(X) \end{aligned}$$

On va appliquer le TFI à f.

$\rightsquigarrow$ f est polynomiale (en chacune de ses 4 variables, pas juste en X !), donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^4$, et pour $(a,b,c,X) \in \mathbb{R}^4$, la jacobienne de f en (a,b,c,X) est donnée par

$$Jac_f(a,b,c,X) = \left(\underbrace{X^2 \quad X \quad 1}_{D_{(a,b,c)}f} \quad \underbrace{3X^2 + 2aX + b}_{D_Xf} \right)$$

Soit $(a_0,b_0,c_0,X_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P_0(X_0) = 0$. Alors

$$\det(D_Xf(a_0,b_0,c_0,X_0)) = 3X_0^2 + 2a_0X_0 + b_0 = P'(X_0).$$

Donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f en (a_0,b_0,c_0,X_0) si, et seulement si, $P'(X_0) \neq 0$, autrement dit si X_0 est racine simple de P_0.

De plus, cette condition est nécessaire

$\rightsquigarrow$ Dans ce cas, il existe un voisinage U de (a_0, b_0, c_0) dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage V de X_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$(a, b, c, X) \in U \times V, P(X) = 0 \iff (a, b, c) \in U \text{ et } X = \phi(a, b, c).$$

Le fait que X_0 soit une racine simple de P_0 est donc une condition suffisante à l'existence de ϕ.

Montrons que c'est aussi une condition nécessaire. Supposons qu'il existe une fonction ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un voisinage U de (a_0, b_0, c_0) telle que

$$\forall (a, b, c) \in U, f(a, b, c, \phi(a, b, c)) = 0$$

Posons $g : (a, b, c) \in U \mapsto f(a, b, c, \phi(a, b, c))$. Alors g est $\mathscr{C}^1$ sur U, et constante égale à 0, donc $Dg(a_0, b_0, c_0) = 0_{(\mathbb{R}^3)^*}$.

Mais du coup

$$0 = \frac{\partial g}{\partial c}(a_0, b_0, c_0) = 1 + (3X_0^2 + 2a_0X_0 + b)\frac{\partial \phi}{\partial c}(a_0, b_0, c_0)$$

donc nécessairement $3X_0^2 + 2a_0X_0 + b \neq 0$ (sinon on se retrouve avec 0=1, ce qui est un problème). Autrement dit, si ϕ existe, alors $P'(X_0) \neq 0$, autrement dit X_0 est une racine simple.

Soit $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3;\ P(X) \text{ admet 3 racines distinctes}\}$.
(i) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Correction : Soit $(a_0, b_0, c_0) \in \Omega$, on note X_1, X_2, X_3 les trois racines (toutes disctinctes) de P_0. Alors

- $P_0(X_1) = 0$, $P_0'(X_1) \neq 0$ (puisque X_1 est nécessairement racine simple), donc par 1., il existe un voisinage U_1 de (a_0, b_0, c_0), V_1 un voisinage de X_1 et $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ telle que pour tout $(a, b, c) \in U_1$, $P(\varphi_1(a, b, c)) = 0$.
- $P_0(X_2) = 0$, $P_0'(X_2) \neq 0$, donc par 1., il existe un voisinage U_2 de (a_0, b_0, c_0), V_2 un voisinage de X_2 et $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ telle que pour tout $(a, b, c) \in U_2$, $P(\varphi_2(a, b, c)) = 0$.
- $P_0(X_3) = 0$, $P_0'(X_3) \neq 0$, donc par 1., il existe un voisinage U_3 de (a_0, b_0, c_0), V_1 un voisinage de X_3 et $\varphi_3 : U_3 \to V_3$ telle que pour tout $(a, b, c) \in U_3$, $P(\varphi_3(a, b, c)) = 0$.

Quitte à restreindre les U_i, on peut supposer que V_1, V_2 et V_3 sont deux à deux disjoints. Alors, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ est un voisinage de (a_0, b_0, c_0) tel que pour tout $(a, b, c) \in U$, le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ a trois racines distinctes $\varphi_1(a, b, c) \in V_1, \varphi_2(a, b, c) \in V_2$ et $\varphi_3(a, b, c) \in V_3$.

On a donc $U \subset \Omega$. Ainsi Ω contient un voisinage de chacun de ses points, donc Ω est un ouvert.

(ii) Montrer que l'application $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) \mapsto (x, y, z)$, où $x < y < z$ désignent les 3 racines distinctes de P, est un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Correction : On va appliquer le théorème d'inversion globale à Θ.

$\rightsquigarrow$ On commence par montrer que Θ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de chaque $(a_0, b_0, c_0) \in \Omega$. Avec les notations précédentes, au voisinage dun point $(a_0, b_0, c_0) \in \Omega$, on a

$$\Theta(a, b, c) = (\varphi_1(a, b, c), \varphi_2(a, b, c), \varphi_3(a, b, c))$$

quitte à changer les numérotations pour être sûr que $\varphi_1(a_0, b_0, c_0) < \varphi_2(a_0, b_0, c_0) < \varphi_3(a_0, b_0, c_0)))$. Dans ce cas, par continuité des φ_i, ces inégalités restent vraies au voisinage de (a_0, b_0, c_0).

Or, d'après le TFI, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont $\mathscr{C}^1$ et pour (a,b,c) proche de $(a_0,b_0,c_0) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} D\varphi_i(a,b,c) &= -D_X f^{-1}(a,b,c,\varphi_i(a,b,c)) D_{a,b,c} f(a,b,c,\varphi_i(a,b,c)) \\ &= -\frac{1}{P'(\varphi_i(a,b,c))} \begin{pmatrix} \varphi_i(a,b,c)^2 & \varphi_i(a,b,c) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$D\Theta(a,b,c) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\varphi_1(a,b,c)^2}{P'(\varphi_1(a,b,c))} & \dfrac{\varphi_1(a,b,c)}{P'(\varphi_1(a,b,c))} & \dfrac{1}{P'(\varphi_1(a,b,c))} \\ \dfrac{\varphi_2(a,b,c)^2}{P'(\varphi_2(a,b,c))} & \dfrac{\varphi_2(a,b,c)}{P'(\varphi_2(a,b,c))} & \dfrac{1}{P'(\varphi_2(a,b,c))} \\ \dfrac{\varphi_3(a,b,c)^2}{P'(\varphi_3(a,b,c))} & \dfrac{\varphi_3(a,b,c)}{P'(\varphi_3(a,b,c))} & \dfrac{1}{P'(\varphi_3(a,b,c))} \end{pmatrix}$$

Montrons que $D\Theta(a,b,c)$ est inversible.

Méthode 1 : On calcule [1] :

$$\det(D\Theta(a,b,c)) = \frac{1}{P'(\varphi_1)P'(\varphi_2)P'(\varphi_3)} \begin{vmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1 & 1 \\ \varphi_2^2 & \varphi_2 & 1 \\ \varphi_3^2 & \varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(\varphi_2-\varphi_1)(\varphi_3-\varphi_1)(\varphi_3-\varphi_2)}{P'(\varphi_1)P'(\varphi_2)P'(\varphi_3)}$$

où on a reconnu un déterminant de Vandermonde. Observons qu'alors, puisque les φ_i sont tous distincts, on a $\det(D\Theta(a,b,c)) \neq 0$ pour tout (a,b,c) voisin de (a_0,b_0,c_0). C'est en particulier vrai en (a_0,b_0,c_0). On en déduit que Θ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de chaque point de Ω.

Méthode 2 : Si l'on ne reconnaît pas le déterminant de Vandermonde, tout espoir n'est pas perdu. Montrons que les colonnes de la matrice de $D\Theta(a,b,c)$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$. Cela montrera que $D\Theta(a,b,c)$ est inversible.

Supposons donc que α, β, γ sont trois réels tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} \frac{\varphi_1^2}{P'(\varphi_1)} \\ \frac{\varphi_2^2}{P'(\varphi_2)} \\ \frac{\varphi_3^2}{P'(\varphi_3)} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{\varphi_1}{P'(\varphi_1)} \\ \frac{\varphi_2}{P'(\varphi_2)} \\ \frac{\varphi_3}{P'(\varphi_3)} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{P'(\varphi_1)} \\ \frac{1}{P'(\varphi_2)} \\ \frac{1}{P'(\varphi_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui se réécrit

$$\begin{cases} \alpha\varphi_1^2 + \beta\varphi_1 + \gamma &= 0 \\ \alpha\varphi_2^2 + \beta\varphi_2 + \gamma &= 0 \\ \alpha\varphi_3^2 + \beta\varphi_3 + \gamma &= 0 \end{cases}$$

Mais alors, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont trois racines distinctes du polynôme de degré 2 $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$, donc nécessairement, ce polynôme est nul. Autrement dit $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a donc bien montré que les colonnes de $D\Theta(a,b,c)$ [2] forment une famille libre, donc $D\Theta(a,b,c)$ est inversible. Par le TIL, Θ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de chaque point de Ω.

$\rightsquigarrow$ De plus, Θ est injective sur Ω. En effet, si $\Theta(a_1,b_1,c_1) = \Theta(a_2,b_2,c_2) = (x,y,z)$ alors les polynômes de degré 3

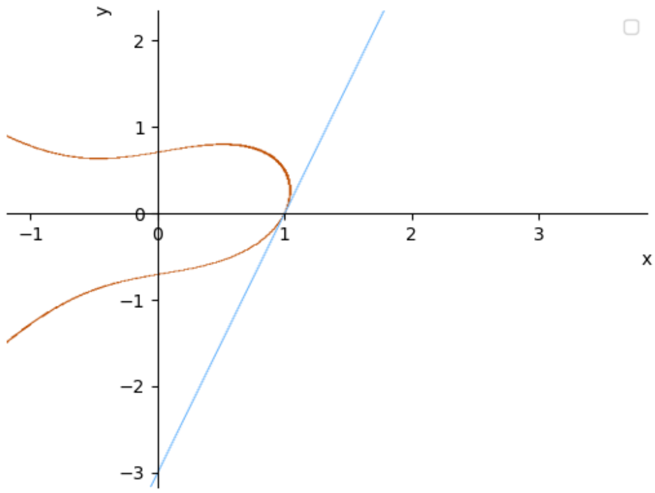
$$P = X^3 + a_1X^2 + b_1X + c_1 \text{ et } Q = X^3 + a_2X^2 + b_2X + c_2$$

ont les mêmes racines $x < y < z$. Donc $P = \alpha(X-x)(X-y)(X-z)$ et $Q = \beta(X-x)(X-y)(X-z)$. Comme le coefficient de plus haut degré de P et Q est 1, on a $\alpha = \beta = 1$ et $P = Q$.

Par le théorème d'inversion globale, $\Theta : \Omega \to \Theta(\Omega)$ est donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

1. Pour alléger les notations, on abrège $\varphi_i(a,b,c)$ en φ_i
2. Oui, bon, de sa matrice.

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3 - xy + 2y^2 = 1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point $(1, 0)$ et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.



Correction : Posons

$$F : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x^3 - xy + 2y^2 - 1$$

de façon à ce que $(x, y) \in \mathcal{C} \iff F(x, y) = 0$.

$\rightsquigarrow$ On va utiliser le TFI pour trouver une fonction réelle φ, $\mathscr{C}^1$, et telle que, au voisinage de $(1, 0)$, $\mathcal{C}$ soit le graphe de la fonction φ. On aura alors l'équation de la tangente :

$$y = \varphi'(1)(x - 1) + \varphi(1)$$

et de plus, pour connaître la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette droite, on pourra utiliser le DL à l'ordre 2 de φ en 1.

Y a plus qu'à.

F est polynomiale, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $F(1, 0) = 0$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Jac\, F(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & 4y - x \end{pmatrix}$$

donc

$$Jac\, F(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

L'application linéaire $D_yF(1, 0) : h \in \mathbb{R} \mapsto -h \in \mathbb{R}$ est inversible. On peut donc appliquer le TFI àF en $(1, 0)$: il existe I, J voisinages de 1 et 0 respectivement, et $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ tels que

$$(x, y) \in \mathcal{C} \cap (I \times J) \iff \begin{cases} (x, y) \in I \times J \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in I \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

Dans $I \times J$, $\mathcal{C}$ est le graphe de φ et on a, en procédant comme à l'exercice 16,

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{3x^2 - \varphi(x)}{4\varphi(x) - x}$$

De plus, puisque $(1, 0) \in \mathcal{C} \cap (I \times J)$ on trouve $\varphi(1) = 0$, d'où on déduit que $\varphi'(1) = -\frac{3 \cdot 1^2 - \varphi(\cdot 1)}{4\varphi(\cdot 1) - 1} = 3$.

D'où on déduit l'équation de la tangente

$$y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) = 3x - 3$$

Comme à l'exercice 16, on trouve aussi que $\varphi'(x)$ est un quotient de fonction $\mathscr{C}^1$, donc φ' est $\mathscr{C}^1$ et

$$\varphi''(x) = \frac{(\varphi'(x) - 6x)(4\varphi(x) - x) - (\varphi(x) - 3x^2)(4\varphi'(x) - 1)}{(4\varphi(x) - x)^2}$$

donc $\varphi''(1) = 36$. On en déduit le DL à l'ordre 2 de φ en 1

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) = 3x - 3 + 18(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

donc $\varphi(x) - (3x-3) \geqslant 0$ au voisinage de 1 : autrement dit, $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente en 1.