Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2022-2023
Compléments d'analyse

Feuille 2 : Optimisation sous contrainte et extrema liés

1 Extremas liés

Exercice 1 Déterminer les extremas de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\Big\}.$$

Exercice 2 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x+y+z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ g(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0\right\}.$$

Exercice 3 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ et } x + y + z - 1 = 0\Big\}.$$

Exercice 4 On considère la parabole

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = 4y\} = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$$

où $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4y \in \mathbb{R}$. On note $u_0 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

1. Justifier qu'il existe $v_{min} \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P}$ tel que :

$$\forall v \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P},\ \|u_0 - v_{min}\| \leqslant \|u_0 - v\|.$$

2. Justifier que

$$\forall v \in \mathcal{P},\ \|u_0 - v_{min}\| \leqslant \|u_0 - v\|.$$

3. Déterminer v_{min}.

Exercice 5 (Nécessité de l'hypothèse sur la surjectivité de $Dg(a)$)

1. On s'intéresse aux extrema de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -y \in \mathbb{R} \text{ sur } \mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^3 - x^2 = 0\}$$

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{F}$, $y \geqslant 0$ et $y = 0$ ssi $x = 0$. En déduire que $f_{|\mathcal{F}}$ a un maximum global sur $\mathcal{F}$ atteint en un point (x^*, y^*) à déterminer.

2. Calculer $\nabla f(x^*, y^*)$ et $\nabla g(x^*, y^*)$. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)?$$

Est-ce que ça contredit le théorème des extrema liés ?

3. **Un autre exemple :** On s'intéresse maintenant aux extrema de

$$\tilde{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3 - 3x^2 \in \mathbb{R} \text{ sur } \tilde{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3 - x)^3 - y^2 = 0\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

4. Montrer que $(3, 0)$ est un maximum global de $\tilde{f}$ sur $\tilde{\mathcal{F}}$.
5. Est-ce que ceci contredit le théorème des extremas liés ?

Exercice 6 (Extrema locaux et globaux) 1. On s'intéresse aux extrema de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \text{ sur } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n, 1-n)$ et $f(1-n, n)$. En déduire que f n'admet pas d'extremum global sur $\mathcal{D}$.
3. **Un autre exemple :** On s'intéresse maintenant aux extrema de

$$\tilde{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2x \in \mathbb{R} \text{ sur } \tilde{\mathcal{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

4. Montrer que, si $t \leqslant \frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}(1+t)^3 - \frac{3}{2}(1+t)^2 + 2(1+t) \leqslant \frac{5}{6}$. En déduire que $(1, 1)$ est un maximum local.
5. Montrer que, si $t \geqslant -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}(2+t)^3 - \frac{3}{2}(2+t)^2 + 2(2+t) \geqslant \frac{2}{3}$. En déduire que $(2, 2)$ est un minimum local.
6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n, n)$ et $f(-n, -n)$. En déduire que f n'admet pas d'extremum global sur $\tilde{\mathcal{D}}$.

Exercice 7 (Inégalité arithmético-géométrique) 1. Déterminer le maximum de la fonction $f : (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mapsto \prod_{i=1} x_i$ sur l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n ;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

2. En déduire que, pour tout $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Exercice 8 Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon de moyenne m et de variance σ^2. On s'intéresse aux estimateurs sans biais de m de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \text{ avec } a_1 + ... + a_n = 1.$$

1. Calculer la variance de l'estimateur $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, en fonction de $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pour que l'estimateur ait une variance minimale.

Exercice 9 Etant donné A une matrice symétrique réelle d'odre $n \geqslant 1$, on considère le problème

$$\inf_{\|x\|=1} < Ax, x >, \tag{1}$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. Montrer que le problème (1) admet une solution x^*.
2. Montrer que x^* est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ^*, minimale parmi toutes les valeurs propres de A.
3. En déduire que A est diagonalisable.