

## Feuille 5 : L'espace de Hilbert $L^2$

### 1 Espace $L^2$

**Exercice 1** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $u, v \in E$ . Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \quad (1)$$

En déduire que, pour  $p \neq 2$ , la norme  $\|\cdot\|_p$  sur  $L^p$  n'est pas associée à un produit scalaire. Faire de même avec la norme  $\|\cdot\|_p$  sur  $\ell^p$ .

**Exercice 2** Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mesurable telle que  $x \in [1, +\infty[ \mapsto x^2 f^2(x) \in \mathbb{R}^+ \in \mathcal{L}^2([1, +\infty[)$ . Montrer que :

$$\left( \int_{[1, +\infty[} f \, d\lambda \right)^2 \leq \int_{[1, +\infty[} x^2 f^2(x) \, d\lambda(x)$$

Pour quelles fonctions a-t-on égalité ?

**Exercice 3** On considère le sous-ensemble  $F$  de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par

$$F = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = 0 \text{ } \lambda\text{-p.p. sur } ]-\infty, 0[\}$$

- Montrer que  $F$  est un s.e.v. fermé de  $L^2(\mu)$  et que

$$F^\perp = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = 0 \text{ } \lambda\text{-p.p. sur } [0, +\infty[\}$$

- On note  $p_F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  la projection orthogonale sur  $F$ , et  $p_{F^\perp} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  la projection orthogonale sur  $F^\perp$ . Montrer que

$$p_F(f) = f \mathbf{1}_{[0, +\infty[}; \quad p_{F^\perp}(f) = f \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}.$$

**Exercice 4** Déterminer le polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que, pour tout  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ ,

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$