Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Feuille 1.5 : Mesure produit et théorème(s) de Fubini

La mesure de Lebesgue permet de généraliser la notion de longueur d'un intervalle. Mais on aimerait aussi intégrer des fonctions de plusieurs variables (deux, pour commencer) et donc, généraliser la notion d'aire d'un rectangle d'une façon cohérente.

Plus généralement, étant donnés deux espaces mesurés $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$, peut-on construire sur $X = X_1 \times X_2$ une tribu $\mathcal{T}$ et une mesure μ à partir de $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, μ_1 et μ_2 ?

1 Produit d'espaces mesurables

Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.

Définition 1
— *On appelle* rectangles mesurables *les sous-ensembles de $X_1 \times X_2$ de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{T}_1$ et $B \in \mathcal{T}_2$.*
— *La* tribu produit *$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ sur $X_1 \times X_2$ est la tribu engendrée par les rectangles mesurables.*

Remarque : Fort commodément, il se trouve que la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est exactement égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ce n'est pas évident : la première est obtenue à partir de produits d'ouverts de $\mathbb{R}$, l'autre à partir des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 Montrer que $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est la plus petite tribu sur $X_1 \times X_2$ qui rende mesurables les projections $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$.

Pour $E \subset X_1 \times X_2$, on note
— pour tout $x_1 \in X_1$, $E_{x_1} := \{x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in E\} \subset X_2$
— pour tout $x_2 \in X_2$, $E^{x_2} := \{x_1 \in X_1, (x_1, x_2) \in E\} \subset X_1$

Exercice 2
1. Soit $A \times B \subset X_1 \times X_2$. Déterminer $(A \times B)_{x_1}$ et $(A \times B)^{x_2}$.
2. Posons
$$\mathcal{A} = \{E \subset X_1 \times X_2, \forall x_1 \in X_1, E_{x_1} \in \mathcal{T}_2 \text{ et } \forall x_2 \in X_2, E^{x_2} \in \mathcal{T}_1\}.$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient les rectangles mesurables.
3. En déduire que pour tout $E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, pour tous $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$, $E_{x_1} \in \mathcal{T}_2$ et $E^{x_2} \in \mathcal{T}_1$.

Soit maintenant $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$. On pose
— pour tout $x_1 \in X_1$, $f_{x_1} : X_2 \to \mathbb{R}, x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$
— pour tout $x_2 \in X_2$, $f^{x_2} : X_1 \to \mathbb{R}, x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$

Exercice 3
1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 5x^2 + y^3$. Déterminer f_2 et f^1.
2. Déterminer $(\mathbb{1}_{A \times B})_a$ et $(\mathbb{1}_{A \times B})^b$.
3. Montrer que si $f : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors pour tout $x_1 \in X_1$, f_{x_1} est mesurable et pour tout $x_2 \in X_2$, f^{x_2} est mesurable.

2 Mesure produit

Les λ-systèmes. Les λ-systèmes vont être des familles de sous-ensembles d'un ensemble X un peu plus généraux que les tribus, et qui vont nous faciliter la vie un peu plus loin.

Définition 2 *Une famille de sous-ensembles $L \subset \mathcal{P}(X)$ est un* λ-système *si*
- *$X \in L$;*
- *L est stable par différence : Si $A, B \in L$, $A \subset B$ alors $B \setminus A \in L$;*
- *L est stable par union dénombrable* croissante *: Si $(A_n)_n$ est telle que $A_n \in L$ et $A_n \subset A_{n+1}$ alors $\bigcup A_n \in L$.*

Exercice 4 Soit $\lambda(R)$ le plus petit λ-système sur $X_1 \times X_2$ qui contient l'ensemble R des rectangles mesurables.

1. Montrer que $\lambda(R)$ est stable par intersection finie.
   Indication : Considérer, pour $A \in R$, $L' = \{B \in L,\ B \cap A \in L\}$.
2. Montrer que L est une tribu. En déduire que $\lambda(R) = \mathcal{T}_1 \otimes T_2$

Remarque : Avec la même preuve, on montre plus généralement que si $S \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersection finie, alors le λ-système engendré par S est une tribu et $\lambda(S) = \sigma(S)$ (c'est le *lemme des classes monotones*).

On va en déduire un résultat d'unicité pour les mesures sur $X_1 \times X_2$:

Exercice 5 Soient μ et ν deux mesures sur $(X = X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ qui coïncident sur les rectangles mesurables :

$$\forall A \in \mathcal{T}_1,\ \forall B \in \mathcal{T}_2,\ \mu(A \times B) = \nu(A \times B).$$

1. On suppose dans un premier temps que μ et ν sont des mesures finies : $\mu(X) < \infty,\ \nu(X) < \infty$. Montrer que
   $$L = \{E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu(E) = \nu(E)\}$$
   est un λ-système qui contient les rectangles mesurables. En déduire que $\mu = \nu$.
2. On ne suppose plus μ et ν finies ; à la place, on suppose qu'il existe une suite croissante (E_n) de rectangles mesurables telle que pour tout n, $\mu(E_n) < \infty$, $\nu(E_n) < \infty$ et telle que : $X_1 \times X_2 = \bigcup E_n$. Montrer qu'alors $\mu = \nu$.

On peut maintenant démontrer l'existence de la mesure produit :

Théorème 1 *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*
- *Il existe une unique mesure μ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ telle que*
  $$\forall A \in \mathcal{T}_1,\ \forall B \in \mathcal{T}_2,\ \mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B). \qquad (*)$$
  On l'appelle mesure produit*, et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.*
- *Pour tout $E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, les fonctions $x \in X_1 \mapsto \mu_2(E_x)$ et $y \in X_2 \mapsto \mu_1(E^y)$ sont mesurables, et*
  $$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_x) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \mu_1(E^y) d\mu_2(y)$$

Exercice 6 1. Montrer l'unicité de la mesure produit.

2. Supposons dans un premier temps que μ_2 est une mesure finie. Montrer que

$$L = \{E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, x \mapsto \mu_2(E_x) \text{ est mesurable}\}$$

est un λ-système qui contient les pavés. En déduire que $x \mapsto \mu_2(E_x)$ est mesurable pour tout $E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

3. Montrer que $x \mapsto \mu_2(E_x)$ est aussi mesurable quand μ_2 est σ-finie.

4. Pour $E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, on pose $\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_x) d\mu_1(x)$. Montrer que c'est une mesure qui vérifie $(*)$.

5. En déduire la seconde égalité. (*Indication :* Utiliser l'unicité).

Pourquoi doit-on supposer μ_1 et μ_2 σ-finies ?

Exercice 7 Considérons sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la mesure de Lebesgue λ et la mesure de comptage μ.

1. Montrer que μ n'est pas σ-finie.
2. Justifier que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ (donc fait partie de la tribu produit).
3. Déterminer, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\mu(E_x)$ et $\lambda(E_y)$, puis en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \mu(E_x) d\lambda(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \lambda(E^y) d\mu(y).$$

3 Théorèmes de Fubini

Via la mesure produit, on peut maintenant définir l'intégrale de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$. On peut alors se demander quel est le lien avec les intégrales multiples : a-t-on bien

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d(\lambda \otimes \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y),$$

et peut-on intervertir l'ordre des intégrales en x et y ? C'est le but des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-tout-court (aussi appelé Fubini-Lebesgue).

Théorème 2 (Théorème de Fubini-Tonelli) *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis, et soit $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ une fonction mesurable positive. Alors les fonctions*

$$\begin{array}{rcl} X_1 & \to & [0, \infty] \\ x & \mapsto & \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} X_2 & \to & [0, \infty] \\ y & \mapsto & \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \end{array}$$

sont mesurables et

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_2(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \end{aligned}$$

Autrement dit, pour des fonctions positives, tout se passe bien. Montrons-le :

Exercice 8 1. Supposons dans un premier temps que $f = \mathbb{1}_E$ pour un $E \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Montrer que

$$\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) = \mu_2(E_x) \text{ et } \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(y) = \mu_1(E^y).$$

En déduire le résultat dans ce cas.

2. Justifier que le théorème est vrai dans le cas d'une fonction étagée positive.
3. On se place dans le cas général d'une fonction mesurable positive. En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer que

$$x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \text{ et } y \mapsto \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(y)$$

sont des limites de fonctions mesurables, donc mesurables. Utiliser la convergence monotone une deuxième fois pour conclure.

Dans le cas des fonctions intégrables pas nécessairement positives, on a le

Théorème 3 (Théorème de Fubini-Lebesgue) *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis, et soit $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :*

1. *Pour presque tout $x \in X_1$, $y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$. Symétriquement, pour presque tout $y \in X_2$, $x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$.*
2. *La fonction $x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)$, définie μ_1-p.p., est dans $\mathcal{L}^1(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$. Symétriquement, la fonction $y \mapsto \int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)$, définie μ_2-p.p., est dans $\mathcal{L}^1(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$.*
3. $$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y) \right) d\mu_2(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \end{aligned}$$

Exercice 9 (Un contre-exemple) Considérons $]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue et soit

$$\begin{aligned} f :\,]0,1[^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

1. Pour $0 < x < 1$, calculer $\int_0^1 f(x,y)dy$. En déduire $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$.
2. Pour $0 < y < 1$, calculer $\int_0^1 f(x,y)dx$. En déduire $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy$.
3. On écrit $f = f_+ + f_-$. Calculer $\int_{]0,1[^2} f_+ d\lambda \otimes \lambda$. f est-elle dans $\mathcal{L}^1(]0,1[^2)$?