Ex 13 1) À (a,b,c) on associe le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$

Soit (a_0, b_0, c_0) ($\rightsquigarrow$ pol. P_0) et $X_0 \in \mathbb{R}$ tq $P_0(X_0) = 0$

On cherche $\mathcal{U}$ voisinage de $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\in \mathbb{R}^3$

tq $\begin{cases} \forall (a,b,c) \in \mathcal{U}, \quad P(\varphi(a,b,c)) = 0 \\ \varphi(a_0, b_0, c_0) = X_0 \end{cases}$

Posons $f : \underbrace{(a,b,c}_{\mathbb{R}^3 \times}, \underbrace{x}_{\mathbb{R}})^{\in \mathbb{R}^4} \longmapsto P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Par hypothèse $f(a_0, b_0, c_0, X_0) = 0$

$$\mathrm{Jac}_f(a_0, b_0, c_0, X_0) = \begin{pmatrix} \underbrace{X_0^2 \quad X_0 \quad 1}_{D_{(a,b,c)}f(a_0,b_0,c_0,X_0)} & \underbrace{\boxed{3X_0^2 + 2a_0X_0 + b_0}}_{D_x f(a_0,b_0,c_0,X_0)} \end{pmatrix}$$

Condition suffisante

Si $P_0(X_0) = 0$ et $\boxed{P_0'(X_0) = 3X_0^2 + 2a_0X_0 + b_0 \neq 0}$ (ie X_0 est racine simple de P_0)

alors, par le TFI, $\exists\, \mathcal{U}$ voisinage de (a_0, b_0, c_0) et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow V$ $\mathcal{C}^1$

V ——— X_0

tq $\forall (a,b,c,x) \in \mathcal{U} \times V$, $\underbrace{f(a,b,c,x)}_{= P(x)} = 0$ ssi $x = \varphi(a,b,c)$

Donc, $\forall (a,b,c) \in \mathcal{U}$, $\underbrace{f(a,b,c,\varphi(a,b,c))}_{= P(\varphi(a,b,c))} = 0$

Mq la condition est nécessaire :

Supposons qu'il existe $\mathcal{U}$ vois de (a_0, b_0, c_0)

et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f(a,b,c,\varphi(a,b,c)) = 0$

$\forall (a,b,c) \in \mathcal{U}$

Autrement dit, si on note $g(a,b,c) = f(a,b,c,\varphi(a,b,c))$

on a $g(a,b,c) = 0 \quad \forall (a,b,c) \in \mathcal{U}$

$g = f \circ \psi$ où $\psi : (a,b,c) \longmapsto (a,b,c,\varphi(a,b,c))$

$$\mathrm{Jac}_{\psi}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Jac}_g(a,b,c) = \mathrm{Jac}_f(\varphi(a,b,c)) \cdot \mathrm{Jac}_\varphi(a,b,c)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^2 & \varphi & 1 & 3\varphi^2+2a\varphi+b \end{pmatrix}}_{1\times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial a} & \frac{\partial\varphi}{\partial b} & \frac{\partial\varphi}{\partial c} \end{pmatrix}}_{4\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\varphi^2 + (3\varphi^2+2a\varphi+b)\frac{\partial\varphi}{\partial a}}_{\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial a}} & \underbrace{\varphi + (3\varphi^2+2a\varphi+b)\frac{\partial\varphi}{\partial b}}_{\frac{\partial g}{\partial b}} & \underbrace{1+(3\varphi^2+2a\varphi+b)\frac{\partial\varphi}{\partial c}}_{\frac{\partial g}{\partial c}} \end{pmatrix}$$

Puisque $g=0$ sur $\mathcal{U}$, $\frac{\partial g}{\partial c}(a_0,b_0,c_0) = \boxed{0 = 1+(3x_0^2+2ax_0+b)\frac{\partial\varphi}{\partial c}(a_0,b_0,c_0)}$

$\rightarrow$ Donc forcément $3x_0^2+2ax_0+b \neq 0$: c'est une condition nécessaire

$$g(x) = f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$f(a,b,c,\varphi(a,b,c))$$

$$\shortparallel$$

On a trouvé $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall \underbrace{(a,b,c)} \in \mathcal{U}$, $P(\varphi(a,b,c)) = 0$

$\hookrightarrow P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$

De plus, $D\varphi(a,b,c) = -D_x f(a,b,c,\varphi(a,b,c))^{-1} \cdot D_{(a,b,c)} f(a,b,c,\varphi(a,b,c))$

$$= \frac{-1}{P'(\varphi(a,b,c))} \begin{pmatrix} \varphi(a,b,c)^2 & \varphi(a,b,c) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}_f(a,b,c,x) = \Big(\underbrace{\boxed{x^2 \quad x \quad 1}}_{D_{a,b,c} f} \; \underbrace{\boxed{3x^2 + 2ax + b}}_{P'(x)} \Big) \leftarrow D_x f$$

2) $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P$ admet 3 racines distinctes$\}$

↳ donc ce sont des racines simples

(i) Mq Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$

Mq Ω est un voisinage de (a_0,b_0,c_0)

Soit $\underbrace{(a_0,b_0,c_0)}_{\hookrightarrow P_0} \in \Omega$, mq

Soit X_1 une racine de P_0 alors $P_0(X_1)=0$, $P_0'(X_1) \neq 0$

→ Par (1) $\exists\ \mathcal{U}_1$ vois de (a_0,b_0,c_0) et $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$

V_1 vois de X_1 tq $\forall (a,b,c) \in \mathcal{U}_1,\ P(\varphi_1(a,b,c))=0$

De m̂ si X_2, X_3 sont les 2 autres racines simples de P_0,

$\exists\ \mathcal{U}_2$ vois de (a_0,b_0,c_0), V_2 vois de X_2 et $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_2$

tq $P(\varphi_2(a,b,c))=0$

$\exists\ \mathcal{U}_3$ ——————, V_3 —————— X_3 et $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow V_3$

tq $P(\varphi_3(a,b,c))=0$

Quitte à réduire $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$, on peut supposer V_1, V_2, V_3 disjoints
(car X_1, X_2, X_3 distincts)

Mais alors $\forall (a,b,c) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$

$\varphi_1(a,b,c)$, $\varphi_2(a,b,c)$, $\varphi_3(a,b,c)$ sont 3 racines distinctes de P

$\rightarrow (a,b,c) \in \Omega$

Autrement dit $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$ est un voisinage de (a_0, b_0, c_0) inclus dans Ω

donc Ω est un voisinage de (a_0, b_0, c_0)

$\rightarrow \Omega$ est un ouvert.

(ii) $\Theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad x<y<z$ racines de X^3+aX^2+bX+c

$(a,b,c) \longmapsto (x,y,z)$

$\rightarrow$ On va appliquer le thm d'inversion globale

- Soit $(a_0,b_0,c_0) \in \Omega$ mq $D\Theta(a_0,b_0,c_0)$ est inversible

On sait qu'il existe $\mathcal{U}$ vois de (a_0,b_0,c_0)

et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tq $\forall (a,b,c) \in \mathcal{U}$

$$\Theta(a,b,c) = \left(\varphi_1(a,b,c), \varphi_2(a,b,c), \varphi_3(a,b,c)\right)$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Jac}_\Theta(a,b,c) = \begin{pmatrix} \mathrm{Jac}_{\varphi_1}(a,b,c) \\ \mathrm{Jac}_{\varphi_2}(a,b,c) \\ \mathrm{Jac}_{\varphi_3}(a,b,c) \end{pmatrix}$ $\quad$ Or $\mathrm{Jac}_{\varphi_1}(a,b,c) = \dfrac{-1}{P'(\varphi_1)}\left(\varphi_1^2 \;\; \varphi_1 \;\; 1\right)$

$$\det\left(\operatorname{Jac}_{\Theta}(a_0,b_0,c_0)\right) = \det\begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi_1^2}{P_0'(\varphi_1)} & -\dfrac{\varphi_1}{P_0'(\varphi_1)} & -\dfrac{1}{P_0'(\varphi_1)} \\ -\dfrac{\varphi_2^2}{P_0'(\varphi_2)} & -\dfrac{\varphi_2}{P_0'(\varphi_2)} & -\dfrac{1}{P_0'(\varphi_2)} \\ -\dfrac{\varphi_3^2}{P_0'(\varphi_3)} & -\dfrac{\varphi_3}{P_0'(\varphi_3)} & -\dfrac{1}{P_0'(\varphi_3)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^3}{P_0'(\varphi_1)P_0'(\varphi_2)P_0'(\varphi_3)} \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1 & 1 \\ \varphi_2^2 & \varphi_2 & 1 \\ \varphi_3^2 & \varphi_3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Vandermonde}}$$

<u>Q</u> est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1 & 1 \\ \varphi_2^2 & \varphi_2 & 1 \\ \varphi_3^2 & \varphi_3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ?

Si ce n'est pas le cas, ses colonnes forment une famille liée

alors $\exists (\alpha, \beta, \gamma)$ 3 réels non tous nuls tq

$$\alpha \begin{pmatrix} \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_3^2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} \alpha \varphi_1^2 + \beta \varphi_1 + \gamma = 0 \\ \alpha \varphi_2^2 + \beta \varphi_2 + \gamma = 0 \\ \alpha \varphi_3^2 + \beta \varphi_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont racines distinctes de $\alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X] \setminus \{0\}$

$\longrightarrow$ contradiction

$\longrightarrow$ Donc la matrice est inversible et Ⓗ est un $\mathcal{C}^1$ difféo local au voisinage de (a_0, b_0, c_0)

- Mq Θ est injective

Supposons que $\Theta(\underbrace{a,b,c}_{\rightsquigarrow P}) = (x,y,z) = \Theta(\underbrace{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}}_{\rightsquigarrow Q})$

alors $P(X) = (X-x)(X-y)(X-z) = Q(X)$ Donc $P = Q$

Donc $(a,b,c) = (\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$

$\rightarrow$ Par le thm d'inversion globale $\Theta : \Omega \longrightarrow \Theta(\Omega)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme