Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Correction : Calcul différentiel - Exercices sur le TEL

Exercice 16 Déterminer les extrémas de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Correction : Les fonctions f et g sont polynomiales, donc de classe $\mathscr{C}^1$, sur $\mathbb{R}^2$. De plus, leurs jacobiennes en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont données respectivement par

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \text{ et } Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Remarquons que $Dg(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$. Or $(0, 0) \notin \mathcal{S}$, donc Dg ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

On peut donc appliquer le théorème des extrema liés : si $f_{|\mathcal{S}}$ admet un extremum en $(a, b) \in \mathcal{S}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (a, b) \in \mathcal{S} \\ Df(a, b) = \lambda Dg(a, b) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b = 2\lambda a \\ a = 2\lambda b \end{cases}$$

Mais alors, $1 = a^2 + b^2 = (2\lambda b)^2 + (2\lambda a)^2 = 4\lambda^2(a^2 + b^2) = 4\lambda^2$, donc $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

▷ Si $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{cases} b = a \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } (a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

▷ Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, on obtient

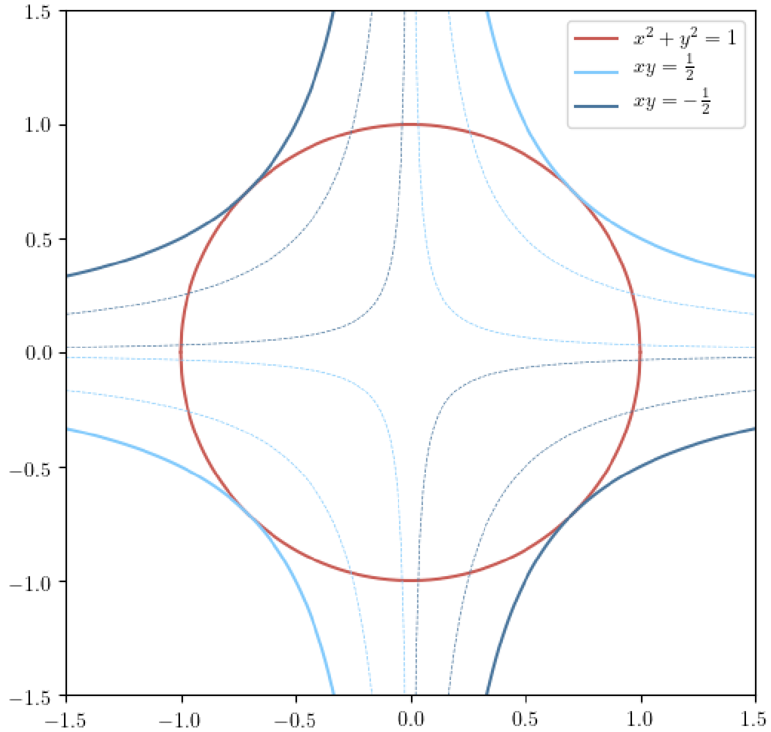
$$\begin{cases} b = -a \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } (a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On a donc obtenu 4 points de $\mathcal{S}$ qui peuvent être des extrema de $f_{|\mathcal{S}}$.

Réciproquement, $\mathcal{S}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie, donc $\mathcal{S}$ est compact. La fonction f est continue sur $\mathcal{S}$, donc $f_{|\mathcal{S}}$ est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{S}$, et cela se produit nécessairement parmi les 4 points "candidats extrema". Or

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

donc, d'une part, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sont des maxima de $f_{|\mathcal{S}}$, et d'autre part $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sont des minima.



Exercice 17 Déterminer les extréma de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x + y + z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ g(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0 \right\}.$$

Que se passe-t-il si on remplace $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E}' = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ g(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0 \right\}.$$

Correction : Les fonctions f et g sont respectivement linéaire et polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Leurs jacobiennes en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont données par

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & \frac{y}{2} & \frac{z}{3} \end{pmatrix}$$

Remarquons que $Dg(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ssi $(x, y, z) = (0, 0, 0) \notin \mathcal{E}$. On peut donc appliquer le théorème des extremas liés : si $f_{|\mathcal{E}}$ admet un extremum en $(a, b, c) \in \mathcal{E}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (a, b, c) \in \mathcal{E} \\ Df(a, b, c) = \lambda Dg(a, b, c) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{6} = 1 \\ 1 = \lambda a = \frac{\lambda}{2} b = \frac{\lambda}{3} c \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda \neq 0$ et

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\lambda}, b = \frac{2}{\lambda}, c = \frac{3}{\lambda} \\ \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} + \frac{9}{6\lambda^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{\lambda}, b = \frac{2}{\lambda}, c = \frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = 3 \end{cases}$$

On trouve donc deux points qui peuvent éventuellement être des extrema de $f_{|\mathcal{E}}$:

▷ pour $\lambda = \sqrt{3}$, on a $u_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$

▷ pour $\lambda = -\sqrt{3}$, on a $u_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)$

Réciproquement, $\mathcal{E} = g^{-1}(0)$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$, et

$$(x,y,z) \in \mathcal{E} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leqslant 6x^2+3y^2+2z^2 = 12\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}\right) = 12$$

donc $\mathcal{E} \subset \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, 12)$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est compact. Comme f est continue, f admet un maximum et un minimum global sur $\mathcal{E}$, et ce sont nécessairement les points qu'on a trouvé. Or

$$f(u_1) = 2\sqrt{3} > -2\sqrt{3} = f(u_2)$$

donc u_1 est le point où $f_{\mathcal{E}}$ atteint son maximum et u_2 est le point où $f_{\mathcal{E}}$ atteint son minimum.

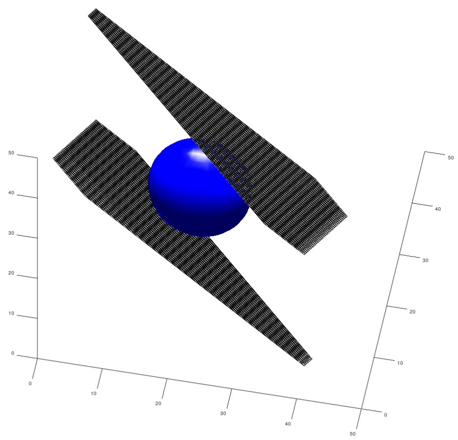


Figure 1 – En bleu : $\mathcal{E}$, en moche : les plans $x+y+z = 2\sqrt{3}$ et $x+y+z = -2\sqrt{3}$

Remplaçons maintenant $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E}' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ g(x,y,z) = -\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}-1 = 0\right\}.$$

Comme précédemment, g est polynomiale, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa jacobienne est donnée par

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x & \frac{y}{2} & \frac{z}{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie donc que $Dg(x,y,z) = (0,0,0)$ ssi $(x,y,z) = (0,0,0) \notin \mathcal{E}'$. On peut donc, de nouveau, appliquer le théorème des extrémas liés à $f_{|\mathcal{E}'}$.

Si $f_{|\mathcal{E}'}$ admet un extremum en $(a,b,c) \in \mathcal{E}'$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (a,b,c) \in \mathcal{E}' \\ Df(a,b,c) = \lambda Dg(a,b,c) \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{6} = 1 \\ 1 = -\lambda a = \frac{\lambda}{2}b = \frac{\lambda}{3}c \end{cases}$$

donc $\lambda \neq 0$ et

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\lambda}, b = \frac{2}{\lambda}, c = \frac{3}{\lambda} \\ -\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{4}{4\lambda^2}+\frac{9}{6\lambda^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{\lambda}, b = \frac{2}{\lambda}, c = \frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = 2 \end{cases}$$

On trouve donc deux points qui peuvent éventuellement être des extrema de $f_{|\mathcal{E}'}$:

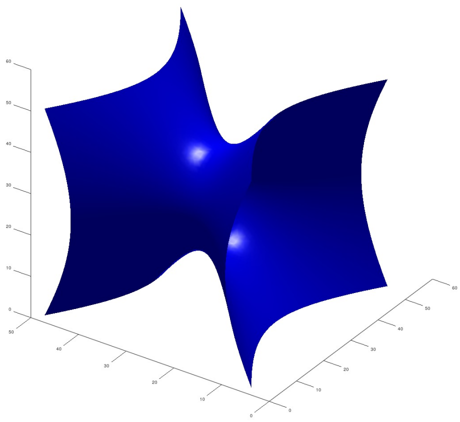
▷ pour $\lambda = \sqrt{2}$, on a $u_1' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, et $f(u_1') = 2\sqrt{2}$.

▷ pour $\lambda = -\sqrt{2}$, on a $u_2' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, et $f(u_2') = -2\sqrt{2}$.

Mais cette fois, u_1 et u_2 ne sont pas des extremas globaux de $f_{|\mathcal{E}'}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\rightsquigarrow$ $(x, \sqrt{4+2x^2}, 0) \in \mathcal{E}'$ et $f((x, \sqrt{4+2x^2}, 0)) > 2\sqrt{2}$ pour x assez grand ;
- $\rightsquigarrow$ $(-x, -\sqrt{4+2x^2}, 0) \in \mathcal{E}'$ et $f((-x, -\sqrt{4+2x^2}, 0)) < -2\sqrt{2}$ pour x assez grand.

$\rightsquigarrow$ f prend des valeurs arbitrairement grandes sur $\mathcal{E}'$, et n'y admet donc pas de maximum (ou de minimum) global. On peut s'en douter en regardant la tête de $\mathcal{E}'$:

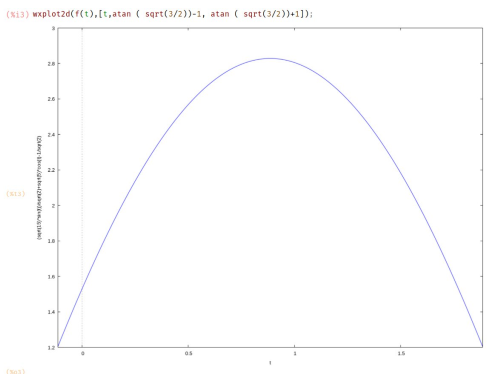


En fait, u_1' et u_2' ne sont même pas des extremas locaux. Pour s'en apercevoir, on considère deux courbes sur $\mathcal{E}'$ qui passent toutes les deux par u_1' :

D'une part

$$\gamma_1(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{5}\cos(t), \sqrt{\frac{15}{2}}\sin(t)\right)$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_1(t) \in \mathcal{E}'$, et $\gamma_1(\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}})) = u_1'$. Autrement dit, γ_1 est une courbe tracée sur $\mathcal{E}'$, qui passe par u_1'. On a de plus $(f \circ \gamma_1)(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\cos(t) + \sqrt{\frac{15}{2}}\sin(t)$. Si on étudie cette fonction, on s'aperçoit qu'elle a un maximum local en $\tan^{-1}(\sqrt{(\frac{3}{2})}) \simeq 0.8860$:

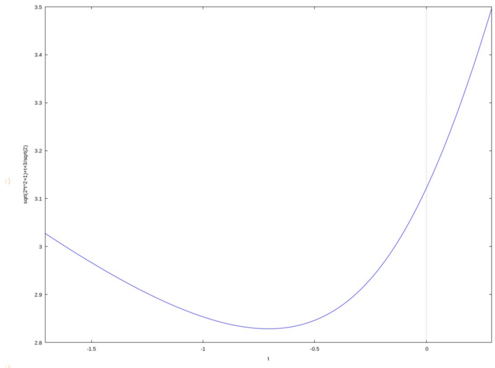


Donc, en prenant t proche de $\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}})$, on trouve que, dans tout voisinage de u_1', il y a $x \in \mathcal{E}'$ tel que $f(x) < u_1'$: u_1' n'est pas un min local.

D'autre part, considérons

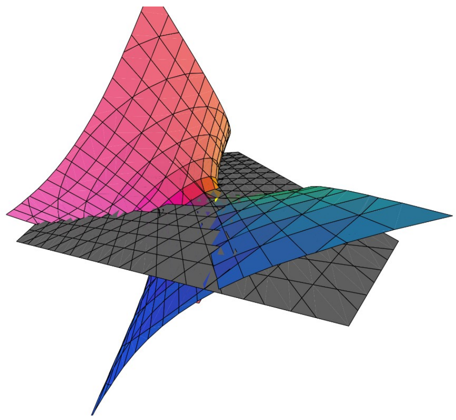
$$\gamma_2(t) = \left(t, \sqrt{1+2t^2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_2(t) \in \mathcal{E}'$, et $\gamma_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = u_1'$. Autrement dit, γ_2 est une courbe tracée sur $\mathcal{E}'$, qui passe par u_1'. On a de plus $(f \circ \gamma_2)(t) = t + \sqrt{1+2t^2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Si on étudie cette fonction, on s'aperçoit qu'elle a un minimum local en $-\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.707$:



Donc, en prenant t proche de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on trouve que, dans tout voisinage de u_1', il y a $x \in \mathcal{E}'$ tel que $f(x) > u_1'$: u_1' n'est pas non plus un max local.

En fait, tout ce que nous dit le TEL, c'est que le plan $x+y+z = 2\sqrt{2}$ est tangent à $\mathcal{E}'$ en u_1' et le plan $x+y+z = -2\sqrt{2}$ est tangent à $\mathcal{E}'$ en u_2' :



Exercice 18 Déterminer les extréma de la fonction $f : (x,y,z) \mapsto z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \text{ et } x+y+z-1 = 0\right\}.$$

Correction : Notons

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1) \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{E}' = g^{-1}(0,0)$. De plus, f et g sont polynomiales, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et leurs différentielles en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sont données par

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire $Dg(x,y,z)$ est surjective sauf si $x = y = z$, ce qui, sur $\mathcal{E}$, ne se produit pas : en effet,

$$\begin{cases} (x,y,z) \in \mathcal{E} \\ x = y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z \\ 3x^2 = 1 \\ 3x = 1, \end{cases}$$

ce qui est contradictoire.

Appliquons donc le théorème des extremas liés à $f_{|\mathcal{E}}$: si $f_{|\mathcal{E}}$ admet un extremum en $(a,b,c) \in \mathcal{E}$, alors il existe λ_1, λ_2 réels tels que

$$\begin{cases} (a,b,c) \in \mathcal{E} \\ Df(a,b,c) = \lambda_1 Dg_1(a,b,c) + \lambda_2 Dg_2(a,b,c) \end{cases}$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = 1 \\ 0 = 2\lambda_1 a + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 b + \lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_1 c + \lambda_2 \end{cases}$$

En sommant les trois dernières lignes, et en utilisant $a+b+c=1$, on obtient $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$. En soustrayant la quatrième ligne aux troisième et cinquième lignes, on obtient de plus

$$\begin{cases} 2\lambda_1(a-b) = 0 \\ 2\lambda_1(c-b) = 1 \end{cases}$$

De cette dernière équation, on déduit que $\lambda_1 \neq 0$ et

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}(1-2\lambda_1) \\ a = b \\ c = b + \frac{1}{2\lambda_1} \\ b = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} = \frac{2\lambda_1 - 1}{6\lambda_1} \end{cases}$$

En remplaçant a, b, c par leur expression dans $a^2+b^2+c^2=1$ on trouve

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\lambda_1-1}{6\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda_1-1}{6\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda_1+2}{6\lambda_1}\right)^2 = 1 \\ \iff 2(2\lambda_1-1)^2 + (2\lambda_1+2)^2 = 36\lambda_1^2 \\ \iff 6\lambda_1^2 + 3 = 18\lambda_1^2 \\ \iff \lambda_1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On trouve donc deux points candidats pour être des extrema de $f_{|\mathcal{E}'}$:

- ▷ pour $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ on obtient $v_1 = (0,0,1)$;
- ▷ pour $\lambda = -\frac{1}{2}$ on obtient $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

et on a $f(v_2) < f(v_1)$.

Puisque $\mathcal{E}$ est un fermé inclus dans la boule fermée $\overline{B}(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$, c'est un compact, donc f (qui est continue) est bornée sur $\mathcal{E}$ et atteint ses bornes. On en déduit que $f_{|\mathcal{E}}$ a un maximum global en v_1 et un minimum global en v_2.