Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Correction : Calcul différentiel - Exercices sur l'inégalité de Hölder

Exercice 23 (Inégalité arithmético-géométrique)
1. Déterminer le maximum de la fonction $f : x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \mapsto \prod_{i=1} x_i \in \mathbb{R}$ sur l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n ;\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Correction : Notons U l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n \subset \mathbb{R}^n$ et

$$g : x = (x_1, \ldots, x_n) \in U \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - 1 \in \mathbb{R}$$

Alors $\mathcal{K} = g^{-1}(0)$. De plus, les applications f et g sont polynomiales, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et on a, pour tout $j \in \{1, n\}$ et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \prod_{i\neq j} x_i \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 1$$

On en déduit que, pour tout $x \in U$, $\nabla g(x) \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des extrémas liés à $f_{|\mathcal{K}}$: si $f_{|\mathcal{K}}$ admet un extremum en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{K}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} a \in \mathcal{K} \\ \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) \end{cases} \iff (\star) \begin{cases} a_1 + \ldots + a_n = 1 \\ \forall j \in \{1, n\}, a_j > 0 \\ \forall j \in \{1, n\}, \prod_{i\neq j} a_i = \lambda \end{cases}$$

En multipliant chacune des équations $\prod_{i\neq j} a_i = \lambda$ par a_j, on trouve que

$$0 < \prod_{i=1}^n a_i = \lambda a_1 = \lambda a_2 = \ldots = \lambda a_n$$

donc $\lambda \neq 0$ et $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Mais alors, en utilisant la première ligne de $(\star)$

$$1 = \sum_{i=1}^n a_i = n a_1 \text{ donc } a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}.$$

ce qui nous donne un seul point possible pour être un extremum de f sur $\mathcal{K}$: $a = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$

Réciproquement, remarquons que $\overline{\mathcal{K}} = \{((x_1, \ldots, x_n), x_i \geqslant 0, \sum x_i = 1\}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, donc compact. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^n$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $\overline{\mathcal{K}}$. En particulier, elle attteint son maximum, soit en a, soit sur $\overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$.

Or, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$, il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_i = 0$, donc $f(x) = 0$. Par ailleurs pour tout $x \in \mathcal{K}, f(x) > 0$.

Donc f est minimale sur $\overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$ et atteint son maximum sur $\overline{K}$ au point a.

On en déduit que $a = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ est le maximum de f sur $\mathcal{K}$.

2. En déduire que, pour tout $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i.$$

(C'est ce qu'on appelle l'inégalité arithmético-géométrique).

Correction : Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors $\frac{a}{\sum a_i} \in \mathcal{K}$, donc

$$\frac{\prod a_i}{(\sum a_i)^n} = f\left(\frac{a}{\sum a_i}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i}$$

Exercice 24 (Inégalité de Hölder sur $\mathbb{R}^n$)

1. Soit $p > 1$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Déterminer le maximum de la fonction

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n;\ \sum_{i=1}^n x_i^p = 1\right\}.$$

Correction : L'application f est linéaire, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On note $U = (\mathbb{R}_+^*)^n \subset \mathbb{R}^n$ et

$$g : x = (x_1, ..., x_n) \in U \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^p - 1 \in \mathbb{R}.$$

Alors $\mathcal{K} = g^{-1}(0)$.
De plus, g est $\mathscr{C}^1$ sur U puisque c'est une somme de composées de fonctions $\mathscr{C}^1$:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \exp(p\ln(x_i))$$

⚠ p n'est pas nécessairement entier, donc g n'est pas un polynôme !

On calcule, pour tout $j \in \{1, n\}$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = b_j \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = px_j^{p-1}$$

On en déduit que ∇g ne s'annule pas sur U et on peut donc appliquer le théorème des extrémas liés à $f_{|\mathcal{K}}$: si $f_{|\mathcal{K}}$ admet un extremum en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{K}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} a \in \mathcal{K} \\ \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) \end{cases} \iff (\star) \begin{cases} a_1^p + \ldots + a_n^p = 1 \\ \forall j \in \{1, ..., n\}, a_j > 0 \\ \forall j \in \{1, ..., n\}, b_j = \lambda p a_j^{p-1} \end{cases}$$

Posons $q = \frac{p}{p-1}$. On a alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout j, $b_j^q = \lambda^q p^q a_j^p$ donc

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^q = \lambda^q p^q \sum_{i=1}^{n} a_i^p = \lambda^q p^q$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$\lambda = \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

De là, on déduit que $\forall j \in \{1, ..., n\}$

$$a_j = \left(\frac{b_j}{p\lambda} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{q}{p}}$$

Donc si f a un extremum sur $\mathcal{K}$, il est forcément atteint au point

$$a = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{p}}} \left(b_1^{\frac{q}{p}}, ..., b_n^{\frac{q}{p}} \right)$$

et on a

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=1}^{n} b_j^{1+\frac{q}{p}} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=1}^{n} b_j^{q(\frac{1}{q}+\frac{1}{p})} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=1}^{n} b_j^q \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

De plus ,remarquons que g est convexe sur U : pour tous $x, y \in U$,

$$\langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i^{p-1} - y_i^{p-1})(x_i - y_i)$$

Or, puisque $p > 1$, on voit, en séparant les cas $x_i \geqslant y_i$ et $x_i < y_i$ que les produits $(x_i^{p-1} - y_i^{p-1})(x_i - y_i)$ sont tous positifs. Donc on a, pour tous $x, y \in U$,

$$\langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y \rangle \geqslant 0$$

ce qui implique que g est convexe.

De plus, f est linéaire, donc concave et, comme $\lambda = \dfrac{1}{p} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} > 0$, la fonction $f - \lambda g$ est concave sur U. Si elle a un point critique, ce point critique est donc nécessairement un maximum global. Or, on a montré que

$$\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a) = 0$$

donc $f - \lambda g$ a un maximum global sur U en a : pour tout $x \in U$,

$$f(x) - \lambda g(x) \leqslant f(a) - \lambda g(a) = f(a)$$

puisque $a \in \mathcal{K}$ donc $g(a) = 0$. Et d'ailleurs, pour tout $x \in \mathcal{K}$, $g(x) = 0$ donc on a, en particulier,

$$\forall x \in \mathcal{K}, f(x) \leqslant f(a)$$

$\rightsquigarrow$ f a un maximum global sur $\mathcal{K}$ qui est atteint en a.

2. En déduire que, pour tout $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Correction : Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ alors

$$\left(\frac{a_1}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, \dots, \frac{a_n}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}}\right) \in \mathcal{K}$$

donc

$$f\left(\frac{a_1}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, \dots, \frac{a_n}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}}\right) = \frac{\sum a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

On utilise cette inégalité pour démontrer que l'application

$$\|.\|_p : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|^p \in \mathbb{R}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $p > 1$. L'inégalité de Hölder nous permet de démontrer que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. En effet, soient, $x = (x_1, \dots, x_n), y = x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p$$

Or, $(|x_i| + |y_i|)^p = (|x_i| + |y_i|)(|x_i| + |y_i|)^{p-1} = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$ d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)*q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)*q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

on en déduit, en divisant de part et d'autre par $(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p)^{\frac{1}{q}}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

D'où finalement, puisque $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$,

$$\|x+y\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Exercice 25 Etant donné A une matrice symétrique réelle d'odre $n \geqslant 1$, on considère le problème

$$(\star) \qquad \inf_{\|x\|=1} < Ax, x >, \tag{1}$$

où $<\cdot,\cdot>$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1.Montrer que le problème $(\star)$ admet une solution x^*.

Correction : Notons $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto < Ax, x >$. L'application f est quadratique, donc continue sur $\mathbb{R}^n$.

De plus, $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc la sphère unité $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$, étant fermée et bornée, est compacte.

On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{S}$.

En particulier, il existe bien x^* de norme 1 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, on ait $f(x) \geqslant f(x^*)$.

2. Montrer que x^* est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ^*, et que toutes les autres valeurs propres de A sont supérieures ou égales à λ^*..

Correction : Notons

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, x\rangle - 1 = \|x\|^2 - 1 \in \mathbb{R}$$

Alors $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|^2 - 1\} = g^{-1}(0)$. De plus f et g sont quadratiques, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$Df(x)(h) = 2\langle Ax, h\rangle, Dg(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$$

don

$$\nabla f(x) = 2Ax,\ \nabla g(x) = 2x.$$

On en déduit que $\nabla g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Puisque $0 \notin \mathcal{S}$, ∇g ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

$\rightsquigarrow$ On peut appliquer le théorème des extrémas liés à $f_{|\mathcal{S}}$: xi $x_0 \in \mathcal{S}$ est un extremum de $f_{\mathcal{S}}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_0 \in \mathcal{S} \\ \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \end{cases} \iff \begin{cases} \|x_0\| = 1 \\ Ax_0 = \lambda x_0 \end{cases}$$

On en déduit que les extrema possibles de f sur $\mathcal{S}$ sont les vecteurs propres de norme 1 de A. De plus, pour un tel x_0, on a $\|x_0\|^2 = 1$ donc

$$f(x) = \langle Ax_0, x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda\|x_0\|^2 = \lambda,$$

donc le minimum de f sur $\mathcal{S}$ est atteint sur tout vecteur propre de norme 1 associé à la plus petite valeur propre λ_{min}.

3. En déduire que A est diagonalisable.

Correction : Considérons une base orthonormée de l'espace propre $E_{\lambda_{min}}$ et complétons-la en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_{min}} \oplus E_{\lambda_{min}}^{\perp}$.

Remarquons que pour tout $x \in E_{\lambda_{min}}^{\perp}$, $Ax \in E_{\lambda_{min}}^{\perp}$: en effet, pour tout $y \in E_{\lambda_{min}}$, on a

$$< Ax, y >=< x, Ay >= \lambda_{min} < x, y >= 0.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base, alors

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{min} Id_{E_{\lambda_{min}}} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

On va donc pouvoir onsidérer B comme la matrice d'un endomorphisme $E_{\lambda_{min}}^{\perp} \to E_{\lambda_{min}}^{\perp}$ et appliquer le raisonnement fait en 1. et 2. à l'application

$$f : x \in E_{\lambda_{min}}^{\perp} \mapsto < Bx, x > \in \mathbb{R}$$

sur $\mathcal{S}' = \{x \in E_{\lambda_{min}}, \|x\| = 1\}$.

Par récurrence, on obtient que f est diagonalisable.