Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Indications : Espaces de Lebesgue

Exercice 9 (Inclusions dans les $\mathscr{L}^p(\mu)$)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $1 \leqslant p < q$. Montrer que :

1. Si $\mu(\Omega) < \infty$, alors $\mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Indication : Soit $f \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Il s'agit de majorer $\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p d\mu$. Penser à utiliser l'inégalité de Hölder avec des exposants conjugués bien choisis, pour se ramener à $\int_\Omega |f|^q d\mu$ que l'on sait finie.

2. Si $(\Omega, \mathscr{A}) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et si μ désigne la mesure de comptage, alors

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

Indication : Soit $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^p < \infty$. Que peut-on en déduire sur la suite $(|f(n)|)_n$? On doit majorer $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^q$. Comment faire "apparaître" $|f(n)|^p$ là-dedans ?

Exercice 10 (Intersections de $\mathscr{L}^p(\mu)$)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$, avec $p_1 \leqslant p_2$.

1. Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a l'inclusion

$$\mathscr{L}^{p_1}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$$

Indication : Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Décomposer $|f|^p$ en

$$|f|^p \cdot \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} + |f|^p \cdot \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}}$$

et majorer l'intégrale de chacun des deux termes.

2. En déduire qu'étant donné $f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A})$, l'ensemble

$$I = \{p \in [1, +\infty[, \ f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)\}$$

est un intervalle.

Indication Rappelons qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est, par définition, un convexe de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit, pour tout $f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; \mathbb{R})$, la quantité

$$N_\infty(f) = \inf\{C > 0; \ \mu(\{x \in \Omega, \ |f(x)| > C\}) = 0\} \in [0, +\infty].$$

1. On veut montrer que $f \leqslant N_\infty(f)$ μ-p.p.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu(\mathscr{N}_k) = 0$ où on a posé

$$\mathscr{N}_k = \left\{x \in \Omega, \ |f(x)| > N_\infty(f) + \frac{1}{k}\right\}.$$

Indication : Utiliser la définition de la borne inférieure dans la formule donnant $N_\infty(f)$: pour tout $\varepsilon > 0$, $N_\infty(f) + \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble

$$\{C > 0; \ \mu(\{x \in \Omega, \ |f(x)| > C\}) = 0\}$$

   (b) Conclure.

Indication : Introduire l'ensemble $\mathscr{N} = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathscr{N}_k$. Montrer que

$$\mathscr{N} = \{x \in \Omega, \ |f(x)| > N_\infty(f)\}.$$

2. On suppose dorénavant que $\mu(\Omega) < \infty$.
   (a) Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$ on a

$$N_p \leqslant \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} N_\infty$$

Indication : Utiliser les résultats de (1.) pour majorer $|f|^p$. En déduire une majoration de $\int_\Omega |f|^p d\mu$.

(b) Soit $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \{f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A});\ N_\infty(f) < \infty\}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = \{x \in \Omega, |f(x)| > N_\infty(f) - \varepsilon\}$. Montrer que $\mu(A_\varepsilon) > 0$ et que, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$(N_\infty(f) - \varepsilon)(\mu(A_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} \leqslant N_p(f).$$

Indication : Supposer, par l'absurde, que $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Dans ce cas, $N_\infty(f) - \varepsilon$ vit dans un ensemble dont on a déjà parlé...

Pour minorer $N_p(f)$, utiliser le fait que $|f|^p \geqslant |f|^p \mathbb{1}_{A_\varepsilon}$.

(c) En déduire que pour tout $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, on a

$$N_\infty(f) = \lim_{p \to +\infty} N_p(f).$$

Indication : Utiliser la question 2.(a) pour majorer $\liminf_{p\to\infty} N_p(f)$ et la question 2.(b) pour minorer $\liminf_{p\to\infty} N_p(f)$. En déduire que ces deux quantités sont égales à $N_\infty(f)$.

Exercice 13 (Convergence dominée dans les $\mathscr{L}^p(\mu)$)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p. Montrer que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} N_p(f_n - f) = 0.$$

Indication : On va chercher à appliquer le théorème de convergence dominée “habituel” à la suite $(|f_n - f|^p)_n$. Pour cela, il faut majorer $|f_n - f|^p$ par une fonction intégrable qui ne dépend pas de n : utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ comme on l'a fait en cours lorsqu'on a majoré $|f + g|^p$ en fonction de $|f|^p$ et $|g|^p$.