Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L3 MIASHS 2019-2020
Compléments d'analyse

Corrigés : Espaces de Lebesgue

Exercice 9 (Inclusions dans les $\mathscr{L}^p(\mu)$)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $1 \leqslant p < q$. Montrer que :

1. Si $\mu(\Omega) < \infty$, alors $\mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Correction : Soit $f \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. On cherche à majorer $\int_\Omega |f|^p \, d\mu$. Pour cela, on va passer de $|f|^p$ à $|f|^q$ en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{q}{p}$ et $\frac{q}{q-p}$ [1], ce qui donne

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{p-q}} d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} = \left(\int_\Omega |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{q-p}{q}}$$

Or, $\int_\Omega |f|^q d\mu < \infty$ puisque $f \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et $\mu(\Omega) < \infty$ puisque la mesure μ est finie. Donc $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty$, autrement dit, $\boxed{f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)}$.

Remarquons qu'au passage, on a obtenu la majoration $N_p(f) \leqslant \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} N_q(f)$.

2. Si $(\Omega, \mathscr{A}) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ et si μ désigne la mesure de comptage, alors
$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu).$$

Correction : Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Alors $\int_\mathbb{N} |f|^p d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p < \infty$, autrement dit la série de terme général $(|f(n)|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ce qui implique que la suite $(|f(n)|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

En particulier, cette suite est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n)|^p \leqslant M$. On en déduit que pour tout n, $|f(n)| \leqslant M^{\frac{1}{p}}$.

Utilisons cette observation pour majorer $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^q$.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^q = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p |f(n)|^{q-p} \leqslant M^{\frac{q-p}{p}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p < \infty$$

en utilisant que, puisque $q \geqslant p$, $|f(n)|^{q-p} \leqslant M^{\frac{q-p}{p}}$.

On a donc bien $\boxed{f \in \mathscr{L}^q(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)}$.

1. On a bien $\frac{q}{p} \geqslant 1$ puisque $q > p$ et $\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{q}{q-p}} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$.

Exercice 10 (Intersections les $\mathscr{L}^p(\mu)$)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$, avec $p_1 \leqslant p_2$.

1. Montrer que pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a l'inclusion

$$\mathscr{L}^{p_1}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathscr{L}^{p}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$$

Correction : Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Il va s'agir de majorer $|f|^p$ en fonction de $|f|^{p_1}$ et $|f|^{p_2}$.

On remarque que si $|f(x)| \leqslant 1$, alors $|f(x)|^{p-p_1} \leqslant 1$ donc $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^{p_1}$.

Inversement, si $|f(x)| > 1$, alors $|f(x)|^{p_2-p} > 1$ donc $|f(x)|^p < |f(x)|^{p_2}$.

De plus, les ensembles $\{|f| \leqslant 1\} = |f|^{-1}(]-\infty, 1])$ et $\{|f| > 1\} = |f|^{-1}(]1, +\infty[)$ sont mesurables, puisque $|f|$ est mesurable, et forment une partition de Ω. On a donc $1 = \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}}$, d'où $|f|^p = |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} + |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}}$. De là,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^p d\mu &= \int_\Omega |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} d\mu + \int_\Omega |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}} d\mu \\
&\leqslant \int_\Omega |f|^{p_1} \mathbb{1}_{\{|f|>1\}} d\mu + \int_\Omega |f|^{p_2} \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}} d\mu \\
&\leqslant \int_\Omega |f|^{p_1} d\mu + \int_\Omega |f|^{p_2} d\mu < \infty
\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

2. En déduire qu'étant donné $f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A})$, l'ensemble

$$I = \{p \in [1, +\infty[,\ f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)\}$$

est un intervalle.

Correction : Si f n'est dans aucun des $\mathscr{L}^p$, alors $I = \emptyset$ est un intervalle. De même si $I = \{p\}$.

S'il existe $p_1 \neq p_2$ dans I, alors $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, donc, par la question précédente, pour tout $p \in [p_1, p_2]$, $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Autrement dit,

$$p_1, p_2 \in I \Rightarrow [p_1, p_2] \subset I.$$

I est donc un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$; autrement dit, c'est un intervalle.

Exercice 12 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On définit, pour tout $f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A}; \mathbb{R})$, la quantité

$$N_\infty(f) = \inf\{C > 0;\ \mu(\{x \in \Omega,\ |f(x)| > C\}) = 0\} \in [0, +\infty].$$

1. On veut montrer que $f \leqslant N_\infty(f)$ μ-p.p.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu(\mathscr{N}_k) = 0$ où on a posé

$$\mathscr{N}_k = \left\{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f) + \frac{1}{k}\right\}.$$

Correction : Notons $A = \{C > 0;\ \mu(\{x \in \Omega,\ |f(x)| > C\}) = 0\}$.

Par définition de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, $N_\infty(f) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A. Il existe donc $C_\varepsilon \in A$ tel que $C_\varepsilon \leqslant N_\infty(f) + \varepsilon$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_k \in A$ tel que $C_k \leqslant N_\infty(f) + \frac{1}{k}$. Cette inégalité implique que

$$\mathscr{N}_k = \left\{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f) + \frac{1}{k}\right\} \subset \{x \in \Omega,\ |f(x)| > C_k\}$$

Or puisque $C_k \in A$, on a $\mu(\{x \in \Omega,\ |f(x)| > C_k\}) = 0$. On en déduit que $\mu(\mathscr{N}_k) = 0$.

   (b) Conclure.

Correction : Posons $\mathscr{N} = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathscr{N}_k$. Montrons que

$$\mathscr{N} = \{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f)\}.$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathscr{N}$. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \mathscr{N}_{k_0}$, donc

$$|f(x)| \geqslant N_\infty(f) + \frac{1}{k_0} > N_\infty(f).$$

On a donc bien $\mathscr{N} \subset \{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f)\}$.

$\boxed{\supset}$ Soit x tel que $|f(x)| > N_\infty(f)$. Alors $|f(x)| - N_\infty(f) > 0$ donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(x)| - N_\infty(f) > \frac{1}{k_0}$, autrement dit $|f(x)| > N_\infty(f) + \frac{1}{k_0}$.
Donc $x \in \mathscr{N}_{k_0} \in \cup_k \mathscr{N}_k$. On a donc montré que $\{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f)\} \subset \mathscr{N}$.

On en déduit que $\mu(\{x \in \Omega,\ |f(x)| > N_\infty(f)\}) = \mu(\mathscr{N}) \leqslant \sum \mu(\mathscr{N}_k) = 0$. Autrement dit, $|f(x)| \leqslant N_\infty(f)$ μ-p.p.

2. On suppose dorénavant que $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$ on a

$$N_p \leqslant \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} N_\infty$$

Correction : D'après (1), pour presque tout $x \in \Omega$, on a $|f(x)| \leqslant N_\infty(f)$, d'où

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \leqslant \int_\Omega N_\infty(f)^p d\mu = N_\infty(f)^p \mu(\Omega) \text{ donc}$$
$$N_p(f) \leqslant N_\infty(f) \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Soit $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \{f \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{A});\ N_\infty(f) < \infty\}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = \{x \in \Omega, |f(x)| > N_\infty(f) - \varepsilon\}$. Montrer que $\mu(A_\varepsilon) > 0$ et que, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$(N_\infty(f) - \varepsilon)(\mu(A_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} \leqslant N_p(f).$$

Correction : Remarquons d'abord que si $N_\infty(f) = 0$ alors $A_\varepsilon = \Omega$ et le résultat tombe tout seul.

Supposons donc $N_\infty(f) > 0$. On procède par l'absurde : supposons que $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Alors, $N_\infty(f) - \varepsilon > 0$ pour ε assez petit, et on a alors $N_\infty(f) - \varepsilon \in A$. Donc

$$N_\infty(f) - \varepsilon \geqslant \inf A = N_\infty(f),$$

ce qui est absurde. On a donc bien $\mu(A_\varepsilon) > 0$.

Par ailleurs, puisque pour tout $x \in A_\varepsilon$, $|f(x)| > N_\infty(f) - \varepsilon$, on a

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \geqslant \int_{A_\varepsilon} |f|^p d\mu \geqslant \int_{A_\varepsilon} (N_\infty(f) - \varepsilon)^p d\mu = (N_\infty(f) - \varepsilon)^p \mu(A_\varepsilon),$$

d'où la majoration souhaitée : $N_p(f) \geqslant (N_\infty(f) - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$.

(c) En déduire que pour tout $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, on a

$$N_\infty(f) = \lim_{p \to +\infty} N_p(f).$$

Correction : D'après 2.(a), on a, pour tout $p \geqslant 1$, $N_p(f) \leqslant N_\infty(f)\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$ donc

$$\limsup_{p \to \infty} N_p(f) \leqslant \limsup_{p \to \infty} (N_\infty(f)\, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}) = N_\infty(f).$$

D'autre part, d'après 2.(b), pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N_p(f) \geqslant (N_\infty(f) - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$\liminf_{p\to\infty} N_p(f) \geqslant \liminf_{p\to\infty}((N_\infty(f) - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}) = N_\infty(f) - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\liminf_{p\to\infty} N_p(f) \geqslant N_\infty(f)$. On a donc

$$N_\infty(f) \leqslant \liminf_{p\to\infty} N_p(f) \leqslant \limsup_{p\to\infty} N_p(f) \leqslant N_\infty(f)$$

Donc $\lim_{p\to\infty} N_p(f)$ existe et vaut $N_\infty(f)$.

Exercice 13 (Convergence dominée dans les $\mathscr{L}^p(\mu)$)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p. Montrer que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} N_p(f_n - f) = 0.$$

Correction : Montrons d'abord que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Pour tout n et pour presque tout x, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. Autrement dit, en posant $A_n = \{x \in \Omega, |f_n(x)| > g(x)\}$, on a $\mu(A_n) = 0$ pour tout n. Soit $B = \{x \in \Omega, f_n(x) \nrightarrow g(x)\}$. Alors, par hypothèse, $\mu(B) = 0$. On en déduit que $\mu\left((\cup_n A_n) \cup B\right) = 0$, et, pour tout $x \notin (\cup_n A_n) \cup B$, par passage à la limite, on a $|f(x)| \leqslant g(x)$, donc

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \leqslant \int_\Omega g^p d\mu < \infty,$$

d'où $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Rappelons le théorème de convergence dominée, qui ressemble furieusement à ce qu'on nous demande :

Théorème *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telle que*

- ▷ *Il existe $h : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $h_n(x) \to h(x)$ μ-p.p.*
- ▷ *Il existe $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout n et pour presque tout x, $|h_n(x)| \leqslant g(x)$.*

Alors $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$.

Par ailleurs, la suite ($h_n = |f_n - f|^p$) converge μ-p.p. vers 0. Par ailleurs, par convexité de $t \mapsto t^p$, on a, pour tous $a, b \geqslant 0$,

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leqslant \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p \text{ donc } (a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

donc on a μ-presque pour tout x,

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p \leqslant (|f_n(x)| + |f(x)|^p) \leqslant 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) \leqslant 2^p g^p$$

Donc la suite $(h_n)_n$ est majorée par la fonction intégrable $2^p g^p$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à $(h_n)_n$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p d\mu = 0,$$

d'où $N_p(f_n - f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ [2].

2. Autrement dit, $(f_n)_n$ converge vers f pour la “norme” N_p. Sauf que ce n'est pas une norme.